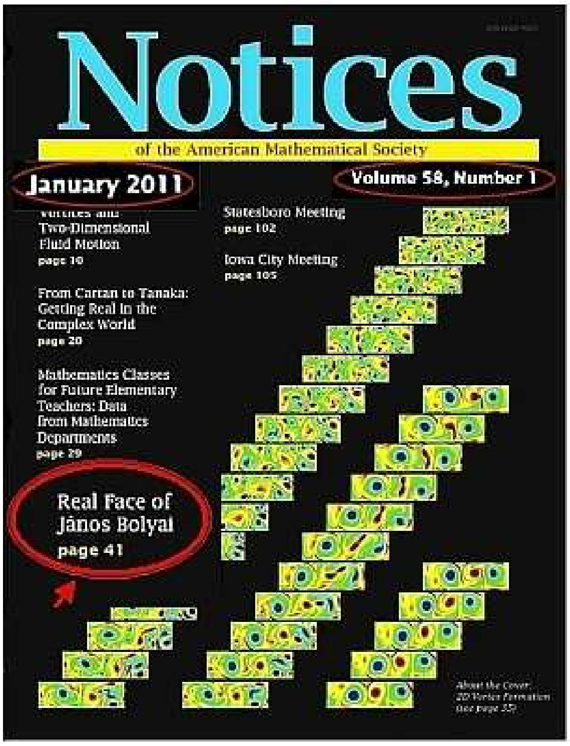
T. Dénes Tamás *matematikus-kriptográfus*
e-mail: **tdenest@freemail.hu**

Bolyai János
valódi arca

Bolyai János halálának
150. évfordulóján



Jelen dolgozatban a címbeli *„arc”* szó két lényegesen különböző értelmezését használom. Az első a portré (arckép) festmény, rajz, fotó segítségével történő megörökítése, a másik az emberi személyiség, életmű elvont fogalomként való értelmezése.
A cikk első része bemutatja azt a meglepő történetet, amelynek során a 19. század óta Bolyai János arca egy nem őt ábrázoló portré formájában terjedt el az egész világon.
A második rész Bolyai János szellemi arcát tárja fel, és Kiss Elemér kutatásai alapján olyan matematikus képét (elme-arcát) mutatja meg, amely Bolyai János életművét egészen új megvilágításba helyezi.

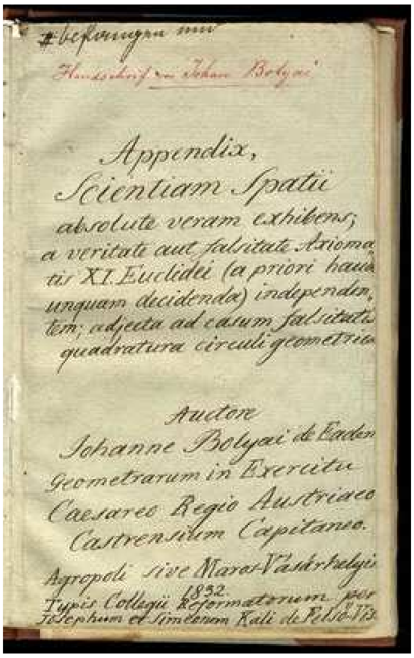
A *Bolyai János valódi arca* programot Kiss Elemér (1929-2006) Tanár Úrral éveken át folytatott levelezés és a beszélgetésekre alkalmat adó nem túl gyakori személyes találkozások inspirálták (lásd http://www.titoktan.hu/Bolyai.htm). Jelen dolgozatot a Tanár Úr emlékének ajánlom, aki már nem érhette meg (pedig nagyon vágyott rá)[1], hogy munkásságát és ezáltal Bolyai János valódi arcát, e dolgozat angol nyelvű változatában, az Amerikai Matematikai Társaság NOTICES című folyóiratának 2011/1. száma által (lásd http://www.titoktan.hu/_raktar/Bolyai/1BolyaiRealFace-Notices2011-01offprint.pdf) az egész világ megismerheti.

[1] 2005-ben korszakos könyvének [17] javított második magyar kiadásában, előszavát így zárja: *„Nagy tudósunk elhunytakor, 1860-ban így ír Dósa Dániel a Kolozsvári Közlöny február 5-i számában megjelent nekrológjában: … mert nagybecsű kéziratait nem adható, elhatározott célja szerint sajtó alá, s kérdés vajon sikerülend-e avatott kezeknek úgy rendbeszedni s világ elébe bocsátani, hogy magas értékök szerint méltó elismerést vívjanak ki.”* … ***„Most úgy érzem, a kéziratok matematikai tárgyú lapjait is sikerült rendbeszedni s világ elébe bocsátani, s remélem, hogy magas értékök szerint méltó elismerést vívnak ki.”***

Csak két Bolyai János kép létezett,
ám egyik sem maradt meg az utókor számára

Bolyai János (1802.12.15.-1860.01.29.) a magyar matematikatörténet első, üstökösként kiemelkedő alakja. „*Híres, nagy elméjű matematikus volt, az elsők közt is első*'" - ahogyan ezt halálakor a marosvásárhelyi református egyház anyakönyvébe bejegyezték. 1823. november 3-i keltezésű, Temesvárról apjának küldött levelében írta le először a híressé vált mondatát: „*A semmiből egy új, más világot teremtettem*".

Ez az új világ a nemeuklideszi geometria vázlata volt, *A tér abszolút igaz tudománya* (*Scientiam Spatii absolute veram exhibens*) 1832-ben *Bolyai Farkas Tentamen* című könyvének függelékeként jelent meg, ezért vált közismertté *Appendix* néven.


Appendix,
Scientiam Spatii
absolute veram exhibens;
a veritate aut falsitate Axioma
tis XI. Euclidei (a priori hau
unquam decidenda) independen
tem; adjecta ad casum falsitatis
quadratura circuli geometrica.

Auctore
Johanne Bolyai de Eadem
Geometrarum in Exercitu
Caesareo Regio Austriaco
Castrensium Capitaneo.

Agropoli sive Maros-Vásárhelyini
1832.
Typis Collegii Reformatorum per
Josephum et Simeonem Kali de Felső-Vist

Bolyai János Appendix című művének címoldala
(Forrás: Magyar Tudományos Akadémia Könyvtárának kézirattára)

Ez az, amit 1894. óta *A Matematikai Tudományok Nemzetközi Bibliográfiai Kongresszusa* döntése alapján *Bolyai-Lobacsevszkij geometriának* neveznek.[2] 2009. januárjában az UNESCO Világemlékezet listájára (Memory of the World Register) került Bolyai János *Appendix* című műve.

Bolyai János apja Bolyai Farkas a 19. századi magyar matematika egyik jelentős tanár alakja volt, aki állandó levelezést folytatott Carl Friedrich Gaussal (1777-1855). Nem meglepő tehát, hogy Bolyai Farkasról és feleségéről, Árkosi Benkő Zsuzsannáról készült korabeli hiteles rajz, illetve olajfestmény. Természetes lenne, hogy a már életében híressé vált gyermeküket is ilyen formában megörökítették. Ám mindössze két Bolyai János kép létezéséről számolnak be a korabeli források, amelyek egyike sem maradt meg az utókor számára. Egy fiatalkori „bécsi képről" maga Bolyai Farkas tett említést a fiához írt 1821. szeptember 3-i levelében. Ez a kép, más források szerint már 1837-ben sem volt meg.

A másik egy hadnagy korában készült kép, amelynek megsemmisítéséről maga Bolyai János számolt be: ,,*egész katonai ingénieurs-hadnagyi teljes parádéban levett mely-képemet is, bizonyos atyámtóli méltatlanság (és) arra következett méltatlankodás következtében*

[2] A tudománytörténet egyik különlegessége, hogy Bolyai János (1802-1860) és Nyikolaj Ivanovics Lobacsevszkij (1792-1856) szinte azonos időben, a Föld két távoli pontján, egymás számára ismeretlenül, ugyanarra a zseniális geometriai felismerésre jutottak. Mégis a tudománytörténészek felvetik az ezzel kapcsolatos prioritási vitát, amelyről jelen cikkben még szó lesz.

összeszaggattam: annyira nem vágytam az aféle mások által vad(ul) vitatni szokott külső halhatatlanságra".

A legújabb Bolyai kutatások, Weszely Tibor[3] és Kiss Elemér[4](†) professzorok is azt támasztják alá, hogy Bolyai Jánosról nem maradt fenn hiteles képmás.

Az arckép amelyik NEM Bolyai Jánost ábrázolja

Kérdés, hogy mindezek ellenére hogyan terjedhetett el az egész Földön egy hitelesnek tartott, ám nem Bolyai Jánost ábrázoló arckép Bolyai János nevével?

Nos, éppen ötven évvel ezelőtt (1960-ban), Bolyai János halálának 100. évfordulóján magyar és román bélyegeken jelent meg egy arckép, amelyre az ő nevét írták. Ebben az időben, sőt ezt követően könyvekben, képeslapokon, majd az Internet megjelenésével egyre rohamosabban terjedt el ez az arckép mindenütt. Ma már biztosan tudjuk, hogy ez a portré nem Bolyai Jánost ábrázolja.

Az arckép amelyik NEM Bolyai Jánost ábrázolja (1960-ban kiadott magyar és román bélyegeken)

A 2010. esztendő Bolyai János halálának 150. évfordulója, itt az idő hát, hogy ötven évi lappangás után megfejtsük e rejtélyt és a legújabb Bolyai kutatások eredményeként közreadjuk *Bolyai János valódi arcát*. Ehhez röviden meg kell ismerkednünk két korabeli magyar festővel és egy festménnyel, amely a történetben kulcsszerepet játszik.

Adler Mór (1826-1902) a magyar festők nesztora. Korán feltűnt az akkor jóhírű Weiszenberg-féle rajziskolában. 1842-1845 között a bécsi Akadémián tanult, ahol Gsellhofer, Kupelwieser és Ender voltak a tanárai. Adler 1845-ben a müncheni akadémiára ment, ahol csaknem egy éven át Zimmermann és Schnorr von Carolsfeld tanítványa volt. 1846-ban már Parisban volt, ahol az akadémián Horace Vernet és Paul Delaroche osztályában, majd Drolling tanár magániskolájában tanult. Rövid négy hónap alatt elnyerte a műterem-díjat s egész sor arckép-megrendelést kapott. 1848. júniusában otthagyta Párizst és hazajött szülővárosába Pestre. Itt egy 1851-ben megnyílt kiállításon tűnt fel "Tonett-csendélet" című kepével, amely Bécsbe került. Ezután, élete végéig Magyarországon élt, s főleg arcképet és csendéletet festett. Az l896-os millennáris kiállításon kilenc festett és rajzolt művel vett részt. Hagyatékában leginkább csendéletet és arcképeket találunk. Annyira szerette képeit, hogy azokat, amelyek nagyon tetszettek neki s vevője akadt, később nem egyszer visszavásárolta.

[3] Sapientia Egyetem, Marosvásárhely, Románia

[4] Haláláig (2006.†) a Sapientia Egyetem matematika professzora, Marosvásárhely, Románia.

Adler Mór 1864-ben festette az alábbi képen látható egészalakos nagyméretű (150x100 cm) olajfestményt.

Adler Mór 1864-ben készült olajfestménye

Hogy valójában kit ábrázol Adler Mór 1864-ben készült festménye, az sem a festmény elülső, sem a hátoldalán nincs feltűntetve, sőt korabeli dokumentumokban sem szerepel. Azt viszont biztosan tudjuk, hogy **Lühnsdorf Károly (1893-1958)**[5] magyar festőművész készített e festményről egy portré rajzot, amelynek aljára Bolyai János neve mellé ezt írta: ***„Rajzoltam az egyetlen megmaradt Bolyai János arcképnek Adler Mór (1826–1902) óbudai festőművész által 1864-ben készített eredeti utáni -festménye alapján- Lühnsdorf Károly"***

Lühnsdorf Károly rajza Adler Mór festményéről. A rajzon sajátkezű írása, amely a mai napig tévedésben tartja a világot: „Rajzoltam az egyetlen megmaradt Bolyai János arcképnek Adler Mór (1826–1902) óbudai festőművész által 1864-ben készített eredeti utáni -festménye alapján- Lühnsdorf Károly"

---

5 A Magyar Képzőművészeti Főiskolának 1921-1928 között volt hallgatója. Alapvetően portrékat és bibliai témájú jeleneteket készített, arcképei tették igazán ismertté. Művein tudósokat, történelmi és közéleti személyiségeket, főpapokat ábrázolt.

Lühnsdorf Károly eredeti rajza ma a Bolyai család tulajdonában van, de a rajzról készült fotó, valamint Adler Mór fenti egészalakos eredeti olajfestménye a magyar Bolyai János Matematikai Társulat falán látható.[6]

Összegezve Adler Mór és Bolyai János életrajzi adatait, valamint azt, hogy a festmény egy modellt álló kb. 20 éves fiatalemberről készült, a következő eredményre jutunk:

Amennyiben a festmény Bolyai Jánost ábrázolná, úgy annak 1822. körül kellett volna készülnie, amikor Adler Mór még meg sem született. Lühnsdorf rajzán az áll, hogy Adler Mór *„eredeti utáni festménye alapján”*, azaz hogy Adler Mór magáról Bolyairól készítette a festményt. Azt azonban Adler Mór életrajzi adataiból tudjuk, hogy 1848-ig Európát járta és csak ezután telepedett le Magyarországon, amikor már Bolyai János 46 éves volt. Ha esetleg azt feltételezzük, hogy a festő nem közvetlenül a modell után, hanem emlékezetből festette meg Bolyai Jánost, az azért lehetetlen, mert Adler Mór megszületésekor 1826-ban Bolyai János már 24 éves volt. Ha tehát az 1840-es évek végén, amikor Adler Mór művészi tevékenységét elkezdte, azonnal találkoztak volna, Bolyai János már elmúlt 40 éves!

Mindebből egyértelműen adódik, hogy Adler Mór festménye nem ábrázolhatja Bolyai Jánost, így Lühnsdorf Károly (aki 33 évvel Bolyai János halála után született és jóval Adler Mór halálát követően vált ifjú festővé, így egyikükkel sem találkozhatott) nyilván téves információk alapján, önhatalmúlag írta rá rajzára Bolyai János nevét és az egész utókort megtévesztő szöveget. Így indult világkörüli útjára Bolyai János neve alatt, a NEM Őt ábrázoló arckép, amely a 20. században és még napjainkban is, mint egyetlen hiteles Bolyai János arckép terjedt a matematikusok, a diákok, a nevét viselő intézmények között egyaránt! Megdöbbentő, hogy napjainkban az információs társadalmak kulturális öröklődésének alapját képező internetes világháló minden olyan oldalán, ahol Bolyai János képe szerepel, ezt a NEM ŐT ábrázoló portrét találjuk!

Bolyai János valódi arca

„Ő volt az első olyan magyar matematikus, aki -Eötvös Loránd szavaival – világraszólót alkotott. Nagy tudósunkról sajnos nem maradt fenn hiteles kép, így az utókor nem ismerhette meg arcvonásait. Csak 48 éves korában készült útlevele alapján tudjuk, hogy középtermetű, kékszemű, hosszúkás arcú volt.” (Kiss Elemér)

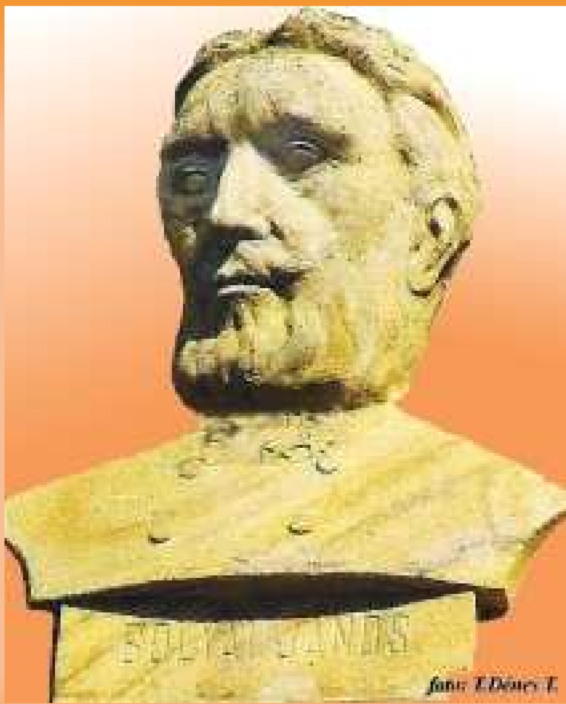
Ismertek korabeli leírások, miként nézett ki Bolyai János. Tudjuk, sötétbarna szakállt viselt, ilyen volt haja színe, szeme pedig sötétkék. Figyelemre méltó Koncz Józsefnek, a marosvásárhelyi kollégium történetírójának a kijelentése: Bolyai János nagyon hasonlított Klapka György honvéd tábornokunkhoz. A másik fontos tény: fia, Bolyai Dénes azt állította, hogy nagy a hasonlatosság közte és édesapja között.

[6] Az itt közölt fotókat a Bolyai János Matematikai Társulatban készítettem és a Társulat igazgatójának engedélyével teszem közzé.

A marosvásárhelyi Kultúrpalota homlokzatát a Tükörterem ablakai felett, hat egymást követő dombormű díszíti, amelyek Marosvásárhely 19. századi szellemi nagyságait ábrázolják. A domborművek alatt elmosódott, mégis olvasható feliratok azonosítják az egyes alakokat. Balról a harmadik Bolyai Farkas, a negyedik Bolyai János neve. Bolyai János kivételével mindegyikükről van hiteles képünk is. Ezeket a hiteles képeket egyenként összehasonlítva a Kultúrpalota domborműveivel az arcvonások tökéletes megegyezését tapasztaljuk. Ha elővesszük Klapka György és Bolyai Dénes hiteles portréját és a Kultúrpalota homlokzatán lévő Bolyai János ábrázolás mellé helyezzük, megdöbbentő az ábrázolás feltűnő hasonlósága, mintha ugyanazon személyről készültek volna.

A marosvásárhelyi Kultúrpalota 1911-1913. évek között épült, amikor még éltek Marosvásárhelyen olyan emberek, akik Bolyai Jánost ismerték, látták. Élt még fia, Bolyai Dénes, aki ekkor már nyugalmazott törvényszéki igazgató volt, és családtagként részt vett nagyapja és édesapja 1911. június 7-i exhumálásán. Ezt a tényt a kihantoláskor készített jegyzőkönyv is rögzíti. Természetes tehát, hogy a művész, aki ebben az időben véste kőbe Bolyai János arcvonásait, kép hiányában támaszkodott fia (Bolyai Dénes) és a Bolyai Jánost ismerők véleményére, elbeszéléseire.

A marosvásárhelyi Kultúrpalota homlokzatát a Tükörterem ablakai felett hat egymást követő dombormű díszíti, amelyek Marosvásárhely 19. századi szellemi nagyságait ábrázolják. Balról a harmadik Bolyai Farkas, a negyedik Bolyai János.

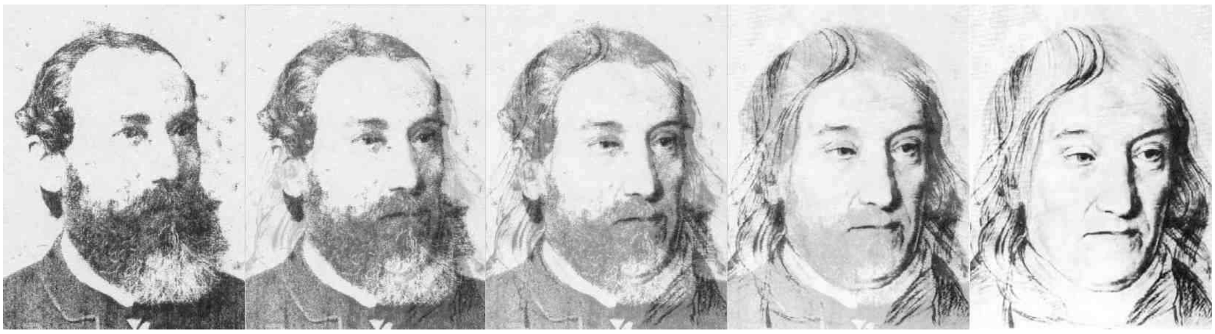


Az egyetlen hitelesnek tekinthető Bolyai János ábrázolás

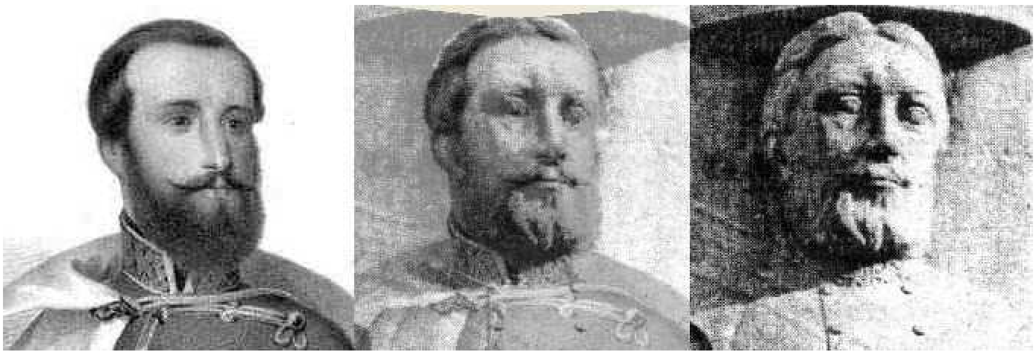
Segít a számítógépes portré animáció

Mindezek alapján, ma már el kell fogadni, hogy nincs Bolyai Jánosról semmilyen közvetlenül készült hiteles portré. Hiszen bebizonyítottuk, hogy az Adler Mór, illetve Lühnsdorf Károly képek nem Bolyai Jánost ábrázolják. Annak ma már gyakorlatilag nulla a valószínűsége, hogy valaha valahol, eddig nem ismert archívumban rátaláljanak egy hiteles festményre vagy rajzra.
Ám nagyon fontos az a tény, hogy rendelkezünk az apja (Bolyai Farkas), az anyja (Benkő Zsuzsanna) és a fia (Bolyai Dénes) hiteles portréjával. Ezeket a hiteles portrékat inputként felhasználva, a Meesoft SmartMorph szoftver segítségével készítette el Oláh-Gál Róbert és Máté Szilárd Bolyai János virtuális portréját. A kísérlet célja az volt, hogy a digitális technikára támaszkodva is csökkentsük a szubjektivitást annak eldöntésénél, hogy vajon Adler Mór festménye, vagy a marosvásárhelyi Kultúrpalota épületén található dombormű viseli inkább Bolyai János vonásait?

Bolyai János - Bolyai Dénes számítógépes arc transzformáció
(A szabad szemmel is feltűnő hasonlatosság a számítógépes animáció segítségével még érzékletesebben mutatkozik.)



Bolyai Dénes – Bolyai Farkas számítógépes arc transzformáció
(Az unoka és nagyapa hasonlatossága csak a két generáció közötti apa, Bolyai János genetikus közvetítésével magyarázható.)



Klapka György – Bolyai János számítógépes arc transzformáció

Sok kísérlet után, a számítógépes grafikai animációs technika segítségével az a következtetés rajzolódott ki, hogy a kérdéses két Bolyai János ábrázolás közül (Adler Mór festménye és a

Kultúrpalota domborműve), csak egy mutat az inputként megadott eredeti képekkel igazi hasonlóságot, és ez a Kultúrpalotán lévő dombormű.

Tehát a csend (hallgatás) sok évtizede után, ideje felhívni a figyelmet arra a megrázó tényre, hogy a köztudatban Bolyai Jánosról elterjedt arckép, nem az Ő arca. Bolyai János valódi arcképének egyetlen hiteles forrása tehát a marosvásárhelyi Kultúrpalotán található dombormű, amelyről készített képet a fentiekben bemutattam.

Bolyai János a matematikatörténet többi meghatározó alakjához hasonlóan megérdemli, hogy életművét a jövő generációi már valódi arcképével azonosítsák.

A továbbiakban megmutatjuk, hogy a Bolyai János (ál)arcképére vonatkozó meghökkentő állítás, szinte ugyanígy vonatkozik a köztudatban elterjedt matematikai tevékenységére, azaz a *szellemi arcképére* is.

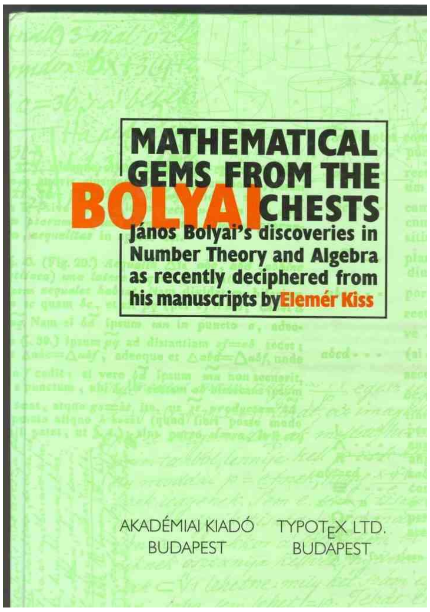
Bolyai János valódi „szellemi arca”
(Kiss Elemér: Matematikai kincsek Bolyai János kéziratos hagyatékából[7] kötete alapján)

Bolyai János életében egyetlen munkája *A tér abszolút igaz tudománya*, ismertebb nevén az *Appendix* jelent meg nyomtatásban. Ez elég volt ahhoz, hogy nevét világhírűvé tegye, de le is szűkítette az utókor Bolyairól alkotott szellemi képét erre a művére. Ám Bolyai János nemcsak az *Appendix*-et hagyta ránk örökül, hanem az apjához írt levelekből és kézzel írott feljegyzésekből álló 14.000 darabos kézirat hagyatékot, amelyeket Marosvásárhelyen ládákban őriznek a Teleki-Bolyai Könyvtárban. Ezek a ládák rejtettek majdnem 100 évig olyan matematikai tételeket –Bolyai szavaival kincseket-, amelyekről semmit sem tudott a világ. A kézirathagyaték lapjai azonban arról győznek meg, hogy a geométerként ismert Bolyai János egyetemes matematikai zseni volt, aki a matematika sok ágával foglalkozott, olykor évtizedekkel megelőzve más nagy nevekhez fűződő felfedezéseket.

A feladat amit Kiss Elemér felvállalt, miközben megfejtette a „Bolyai-ládák” tartalmát, rendkívüli eredményekhez vezetett. Könyve megmutatja a kéziratok és levelek megfejtésének több évtizedes tevékenységét, amely által felfedezhetjük ezeknek az anyagoknak rendkívüli tartalmát. A tartalom, a nyelvtan, a matematikai jelek, amik jelentősen különböztek az akkor elfogadottaktól és a ma használtaktól, gyakran olvashatatlanok voltak. Így ma már tudjuk, hogy ennek a páratlan munkának az eredménye *Bolyai János egészen új szellemi képével lepte meg a 21. századi utókort*. Kiss Elemér könyve 1999-ben jelent meg magyarul és angolul. 2005-ben a javított második magyar kiadás előszavát így zárja (az 1860-ban Bolyai János

[7] Lásd [17] .

elhunytakor a Kolozsvári Közlönyben írt nekrológot idézve): ***„Most úgy érzem, a kéziratok matematikai tárgyú lapjait is sikerült rendbeszedni s világ elébe bocsátani, s remélem, hogy magas értékök szerint méltó elismerést vívnak ki.”***



Kiss Elemér könyve egészen új képet tár fel
Bolyai János matematikai munkásságáról

Az 1. fejezet *„Bolyai János élete és a tér tudománya”* számot ad arról az útról, ami a tudóst az új, abszolút geometria megteremtéséhez vezette. Továbbá az 1.6. fejezetben igazi újdonság, hogy Kiss Elemér meggyőző érvelést mutat be a Bolyai-Gauss-Lobacsevszkij prioritási kérdéssel kapcsolatban úgy, hogy Bolyai János és apja ezirányú leveleinek pontos elemzésével kimutatja: *„Az abszolút geometria felfedezése egyedül Bolyai János érdeme.”*, amit alátámaszt Vekerdi László állítása is, mely szerint: *„Boylai János nem a nemeuklidészi geometriát fedezte fel. Neki a nemeeuklidészi geometria ingyen ajándékként adódott, miután fölfedezte, szó szerint megteremtette az abszolút geometriát, …”*.

A 2. fejezetben olvashatjuk a mintegy 14.000 oldalnyi levelet és kéziratot tartalmazó *„Bolyai-ládák”* rendszeres és átfogó leírását. Ebből a kéziratos hagyatékból 3.000-3.500 oldalra tehető az alapvetően matematikai jegyzeteket tartalmazó írás. A fejezet részben a Bolyai János által használt nyelvezetet és szimbólumokat magyarázza, amelyek megfejtése aprólékos kutatás eredménye, mivel az eredeti szövegek leginkább bonyolult rejtvényekre hasonlítanak. Hiszen Bolyai feljegyzéseit magyar, latin és német nyelven, sokszor vegyesen írta és egyedi jelölései nem alkalmazkodtak a korabeli matematikai standardhoz.

A 4. fejezet (*Bolyai János számelméleti vizsgálódásai*) minden részében különleges szellemi élményt nyújt és Bolyai János igazán új *elme-arcát* mutatja meg. A 4.3. fejezet (*A kis Fermat-tétel*) világossá teszi, hogy Bolyait gyerekkorától izgatták a prímszámok, másokhoz hasonlóan ő is kereste a „prímszám képletet”, amiről így ír apjának: *„A prímek kirekesztő formulájának is már nincs kételyem, hogy még pedig rövid időn belül sikerülnie kell, még pedig bármi idomúak legyenek …”*. A racionális egészek körében a prímszámképletet nem sikerült megtalálnia, mint ahogy napjainkig ez másnak sem sikerült. Vizsgálódásai során azonban igen fontos felfedezést tett, nevezetesen rábukkant több pszeudoprímszámra[8].

Az úgynevezett kis Fermat-tétel[9] fordítottját vizsgálta, vagyis azt, hogy ha $a^{m-1} \equiv 1(\bmod m)$, akkor ebből következik-e, hogy az *m* szám prím?

Bolyai János több eredménytelen bizonyítási kísérlet után kimutatta, hogy Fermat tételének fordítottja nem áll fenn. Több olyan *m* összetett számot talált, amelyekre az $a^{m-1} \equiv 1(\bmod m)$ összefüggés igaz. Kimutatta például, hogy $2^{340} \equiv 1(\bmod 341)$, pedig $341 = 11 \cdot 31$. Eredményét egy levélben írta meg apjának, megjegyezve, hogy a 341-es számot „nem vaktában" találta, hanem „elmélet útján"[10].

Bolyai János itt a következő tételére utal: *ha p és q prímszámok, a pedig nem osztható sem p-vel, sem q-val, akkor abból, hogy* $a^{p-1} \equiv 1(\bmod q)$ *és* $a^{q-1} \equiv 1(\bmod p)$ *következik, hogy* $a^{pq-1} \equiv 1(\bmod pq)$.

E tétel segítségével kapta Bolyai a fenti példát $a = 2$, $p = 11$ és $q = 31$ választással.

Szomorú érdekesség, hogy ez a szép Bolyai-tétel a matematikai irodalomban Jeans-tétel néven ismeretes. Ha Bolyai publikálta volna eredményét, azzal mindenképpen megelőzte volna James Hopwood Jeans (1877-1940) 1898-as dolgozatát[11] és akkor ezt a tételt ma valódi felfedezője, Bolyai János nevével tartaná számon a matematika története. Bolyai felfedezett más pszeudoprímszámokat is:

$$2^{340} \equiv 1(\bmod\ 341),\quad 4^{14} \equiv 1(\bmod 15),\quad 2^{2^{32}} \equiv 1(\bmod 2^{32}+1)$$

Bolyait ki akarta terjeszteni eme tételét arra az esetre is, amikor az *m* szám három prímszám szorzata, azaz szerette volna megtalálni azokat a feltételeket, amelyek mellett az $a^{pqr-1} \equiv 1\,(\bmod pqr)$ kongruencia érvényes, amikor *p,q,r* prímek, *a* pedig egyikkel sem osztható. Próbálkozásait egyik feljegyzésében így fejezi be: *„… de már három tényezőre*

---

[8] Ha *m* összetett szám és $a^{m-1} \equiv 1(\bmod m)$ valamely a -ra, akkor az *m* szám *a* alapú *pszeudoprím*. 1904-ben M.Cipolla bizonyította be először [05], hogy minden *a* természetes számhoz végtelen sok pszeudoprím létezik. Vannak *m* összetett számok, amelyekre ez a kongruencia minden olyan *a* szám esetén teljesül, ahol *a* és *m* relatív prímek. Ezeket felfedezőjükről *Carmichael számoknak* nevezzük [01]. J.Chernick 1939-ben bizonyított tétele alapján megkonstruálható a Carmichael számok egy részhalmaza, amely szerint a $(6k + 1)(12k + 1)(18k + 1)$ alakú számok mindig Carmichael számok, ha mindhárom tényező prím. 1994-ben W. R. Alford, Andrew Granville és Carl Pomerance megmutatták, hogy létezik végtelen sok Carmichael szám. Bebizonyították, hogy elegendően nagy *n* esetén legalább $n^{2/7}$ Carmichael szám van *1* és *n* között. A pszeudoprím számok kutatása a 20. században teljesedett ki és igen fontos alkalmazásra talált a kriptográfia területén [08], például az RSA rejtjelzés elleni támadásokban [07].

[9] A kis Fermat-tétel: Ha *p* prímszám, *a* pedig egy olyan egész szám, amely nem osztható *p*-vel, akkor $a^{p-1} - 1$ különbség osztható *p*-vel, azaz $a^{p-1} \equiv 1(\bmod p)$

[10] Ezt az összefüggést valóban nem lehet „*vaktában*" észrevenni, hisz a $2^{340} - 1$ szám körülbelül 10^{102} nagyságrendű, tehát több mint százjegyű, amelynek numerikus ellenőrzése még mai számítógépeinkkel sem triviális.

[11] 1898-ban Bolyai János már 38 éve meghalt!

meglehetősen vagy elég bonyolult lesz”. Célját ebben az esetben nem sikerült később sem elérnie. 50 évvel Bolyai János halála után jutott csak eszébe másoknak, így például R.D. Carmichaelnek [01], [02]-ben ilyen típusú kongruenciákat konstruálni. Kiss Elemér ebben a fejezetben bebizonyítja az általa már Bolyai-Jeans tételként hivatkozott tétel alábbi általánosítását:

Legyenek $p_1,p_2,\ldots,p_n$ $n\geq 1$ prímszámok és legyen a egy olyan egész szám, amelyik nem osztható ezek egyikével sem.

$$\textit{Ha}\quad \left.\begin{array}{l} a^{p_1p_2\cdots p_{n-1}-1}\equiv 1 \pmod{p_n} \\ a^{p_1p_2\cdots p_{n-2}p_n-1}\equiv 1 \pmod{p_{n-1}} \\ \cdot \\ \cdot \\ \cdot \\ a^{p_2p_3\cdots p_{n-1}p_n-1}\equiv 1 \pmod{p_1} \end{array}\right\} \quad \textit{akkor}\quad a^{p_1p_2\cdots p_n-1}\equiv 1 \pmod{p_1p_2\ldots p_n}$$

A 4.5. fejezet (*Fermat karácsonyi tétele*[12]) Bolyai *4m+1* alakú prímszámokra vonatkozó vizsgálódásait ismerteti, különös tekintettel Fermat klasszikus karácsonyi tételére, melynek több megdöbbentő bizonyítását adja. A bizonyítások szépségét nem csupán az adja, hogy a komplex egészek mellett tisztán elemi eszközöket használ fel, de a mai napig legegyszerűbb és legrövidebb bizonyítások is. Íme a legrövidebb ezek közül, amely alig észrevehetően bújt meg egy kézirat két sora között: *„Az első bizonyítás szerint p=(a+ib)(c+id), amiből következik, hogy p=(a-ib)(c-id) is fennáll. Ekkor* $p^2 = p\cdot p = (a^2+b^2)(c^2+d^2)$*, mivel* $a^2+b^2\rangle 1,\quad c^2+d^2\rangle 1 \quad\Rightarrow p = a^2+b^2 = c^2+d^2$ *”*

A 4.6. fejezet (*A Fermat-féle számok*[13]) Bolyai János Fermat-számokra vonatkozó eredményeit mutatja be. Erről apjának két levelében is ír:

„A numerus perfectus[14] *valamint a* $2^{2^m}+1$*-re nézti előbbi demonstrációm is egyébiránt jó és szép …”*

„Azt megmutatni, hogy bármely 2^p-1 idomú szám prím mihelyt p prím, ugyanakkor, mikor a $2^{2^m}+1$*-gyel bajlódám, éppen magam is megkísértettem, mert valóban, mint irataim is mutatják, magam is azon sejtelemben valék, hogy úgy 2^p-1 mindig prím …”*

Különleges értéket képvisel a fejezetben Bolyai Fermat-számokra vonatkozó tétele, mely szerint *„minden Fermat-szám 6k-1 alakú, így sohasem oszthatóak 3-mal”*. Bizonyítása szokás szerint rendkívül elegáns:

---

[12] Fermat ezt a tételt 1640. karácsonyán írta le: Ha a *p* prímszám *4k+1* alakú, akkor egyértelműen felírható két egészszám négyzetének összegeként.

[13] Az $F_n = 2^{2^n}+1$ alakú számot nevezzük az *n*-edik Fermat-féle számnak, ahol *n* természetes szám. Fermat azt sejtette, hogy az összes ilyen alakú szám prím, de csak az F_0=3, F_1=5, F_2=17, F_3=257, F_4=65637 értékeket tudta kiszámolni. Azonban sejtését Euler 1732-ben megcáfolta, amikor megmutatta, hogy a következő Fermat-szám F_5=641x6700417 nem prím. Az 1980-as években már ismert volt, hogy F_n összetett szám minden $5\leq n\leq 32$ esetben.

[14] *Tökéletes számok* (olyan természetes számok, amelyek megegyeznek összes valódi osztójuk összegével)

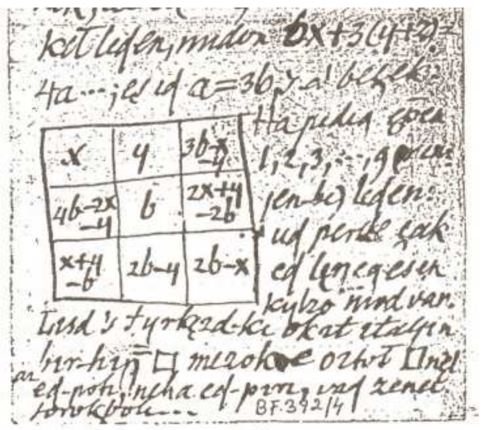
$2^{2m-1}+1=(2+1)(\ldots)$ tehát, $2^{2m-1}+1=3n$ és így $2^{2m-1}=3n-1$, vagyis $2^{2m}=6n-2$. Ebből következik, hogy 2-nek minden páros hatványa 6n-2 alakú. Ekkor $2^{2m}+1$, azaz $2^{2^m}+1$ viszont 6n-1 alakú, ahol $m,n \geq 0$ természetes számok.

Ennek a tételnek a nemzetközi jelentőségét és Kiss Elemér kutatásának a súlyát mutatja a következő [19] publikáció, ahol a 3.12. tételt Bolyai-tételnek nevezték el. Ez az első, magas elismertségű forrás, ahol Bolyai János nevét említik a számelmélet területén (nem a geometriával kapcsolatban), ami egy igazi mérföldkő a Bolyai János valódi szellemi arcához vezető úton.

A 4.7 fejezet (*Wilson tétel*) bemutatja, hogy Bolyai a prímszám formula keresése kapcsán, behatóan foglalkozott a Wilson tétellel[15] és annak megfordításával. Különösen elegáns bizonyítását a Wilson-tétel megfordítására, az olvasó gyönyörködtetésére bemutatom:
Legyen $(p-1)! \equiv -1 \bmod p$ és tételezzük fel, hogy p nem prím, valamint q a p szám prímosztója, azaz $p = q \cdot p_1$. Wilson-tétele szerint $(q-1)! \equiv -1 \bmod q$, de akkor

$$(p-1)! \equiv -1 \bmod q \quad \Rightarrow \quad (q-1)! \equiv (p-1)! \bmod q \quad \Rightarrow \quad 1 \equiv \frac{(p-1)!}{(q-1)!} \bmod q$$

Mivel $q \langle p \quad \Rightarrow \quad \frac{(p-1)!}{(q-1)!} \equiv 0 \bmod q$, ami nyilván csak úgy lehet, ha q=p, tehát p-nek nincs más osztója csak 1 és p, azaz p prímszám.



A 4.8. fejezet (*Bolyai János bűvös négyzete*) bemutatja, hogy Bolyai János kisméretű bűvös négyzetek[16] konstrukciójának általános elméletével is foglalkozott.

Bolyai János általános 3x3-as bűvös négyzete

---

[15] A Wilson-tétel szerint, ha *p* prímszám, akkor $(p-1)! \equiv -1 \bmod p$. A tételt először John Wilson (1741-1793) fogalmazta meg bizonyítás nélkül, majd először Lagrange bizonyította be 1771-ben a tétel megfordításával együtt. Gauss a tétel Lagrange-féle bizonyítását megemlíti *Disquisitiones arithmeticae* című művében, de a tétel megfordításának bizonyításáról nem tesz említést. Mivel Bolyai János a számelméleti ismereteit főképpen Gauss munkájából szerezte, így nem tudhatott a Wilson-tétel megfordításának bizonyításáról.

[16] Egy *n-edrendű bűvös négyzet* olyan *n* sorból és oszlopból álló négyzetes mátrix, amelyben n^2 különböző számot úgy helyezünk el, hogy összegük minden sorban, oszlopban és az átlókban ugyanannyi legyen. A szokásos bűvös négyzet a számokat *1 - n^2*-ig tartalmazza. A sorok, oszlopok, átlók összege az *a* bűvös konstans, amelyre a normál bűvös négyzetben fennáll: $a = \frac{n(n^2+1)}{2}$

Bolyai kéziratában általánosan, betűkkel konstruálja 3x3-as bűvös négyzetét. A négyzetbe írt összefüggésekből levezethető, hogy *a=3b* , így például *b=5* esetén az alábbi bűvös négyzetet kapjuk.

	x	y	$3b-x-y$	$a=15$
	$4b-2x-y$	b	$2x+y-2b$	$a=15$
	$x+y-b$	$2b-y$	$2b-x$	$a=15$
$a=15$	$a=15$	$a=15$	$a=15$	$a=15$

8	3	4
1	5	9
6	7	2

Bolyai János 3x3-as bűvös négyzetének egy konkrét megoldása

Bolyai rövid feljegyzése végén felhívja az olvasót az általa készített általános *3x3-as* bűvös négyzet *nxn-esre* általánosítására: *„Lásd s fűrkészd ki okát általján bár-hány =□*[17] *mezőkre osztott □-nél az egy-póti (számtani sorozat), néha egy-pári (mértani sorozat) vagy zenei (harmonikus sorozat) sorokbóli …”*
Érdemes megjegyezni, hogy Bolyai gondolatai később megjelentek Cayley [03], Chernick [04] munkáiban, valamint általános bűvös négyzet konstrukciót találunk [06]-ban.

A második kiadás 4. fejezete több újdonságot tartalmaz az első kiadáshoz képest, ilyen új alfejezetek a 4.9 (*Zene és matematika*) és a 4.10 (*Bolyai János és a diofantikus egyenletek*). Ezeket a gondolatokat az 1840-es években jegyezte le Bolyai, amikor dolgozott *„Muzsikatan”* című tanulmányán.

A 4.9. fejezetből kiderül, hogy Bolyai Farkas és Bolyai János életében is fontos szerepet játszott a zene elmélyült szeretete és gyakorlása. Mindkét Bolyai foglalkozott a zene elméletével is. Bolyai János hátrahagyott kéziratainak egyik lapján érdekes, a zeneelméletben előforduló $\frac{81}{80}$-as törttel kapcsolatos kérdést vet fel:

„Határozzuk meg azt a $\frac{81}{80}$*-nál kisebb* $\frac{a}{b}$ *(a, b∈N\{0}) törtet, amelynek számlálója 1-gyel nagyobb a nevezőjénél, és az* ***a****, valamint a* ***b*** *természetes számok törzstényezői között csak a 2, 3 és 5 prímszámok fordulnak elő!”*

A feladat megoldását 12 exponenciális diofantikus egyenlet megoldására vezeti vissza, amelyeket Bolyai fel is írt 1840 körül. Rájött azonban, hogy a feladatnak nincs megoldása, hiszen az összes tört amely a feladatnak megfelel, az alábbi:

$$\frac{3}{2}\rangle\frac{4}{3}\rangle\frac{5}{4}\rangle\frac{6}{5}\rangle\frac{9}{8}\rangle\frac{10}{9}\rangle\frac{16}{15}\rangle\frac{25}{24}\rangle\frac{81}{80}$$

Figyelemre méltó viszont, hogy a Bolyai által felírtakhoz hasonló típusú $3^x-2^y=1$ egyenlet csak 1844-ben jelenik meg és E. Catalan francia matematikus nevéhez fűződik. Az egyenlet

[17] Ez az eredeti szimbólum, amit Bolyai a feljegyzésében használ (lásd a képet).

megoldása körül felmerült igen nehéz problémát éppen ezért *Catalan-sejtésként* ismeri a matematikusvilág, amit csak 2002. évben sikerült végképp tisztázni. Ha Bolyai János erre vonatkozó gondolatait közli valamelyik korabeli folyóiratban, ma valószínűleg Catalan helyett Bolyai-sejtésről beszélnénk.

Az 5. fejezet (*Bolyai János legértékesebb számelméleti felfedezése: a „prímtan”*) Bolyai munkásságának olyan eredményeiről beszél, amelyek korábban soha nem voltak ismertek. Ezeket a tanulmányokat Bolyai „prímtan”-nak nevezte, és a komplex egészek aritmetikájával foglalkozott, amelyek kutatásába hatalmas energiákat fektetett.

Komplex egésznek azokat az $a+bi$ alakú komplex számokat nevezzük, ahol *a* és *b* egész számok, $i=\sqrt{-1}$. Mivel a komplex egészek elméletét Gauss alapozta meg, ezért tiszteletére gyakran Gauss-egészeknek nevezzük. Ezek halmaza, a modern algebra terminológiáját használva, a komplex számok összeadására és szorzására nézve egy euklideszi gyűrűt alkot. Ebben a gyűrűben éppen úgy beszélhetünk oszthatóságról, legnagyobb közös osztóról, prímekről és más fogalmakról, mint a racionális egészek gyűrűjében.

Bolyai János már az *Appendix* megjelenése előtt elkezdett foglalkozni a komplex egészekkel, ezt bizonyítja apjának 1845-ben írt levele: „*… az imagináriusok tanát a maga helyén kerestem és meg is kaptam szerencsésen még 1831-ben.”*

Bolyai egyik fontos eredménye, hogy a komplex egészek sokaságában felismerte a prímeket. Megállapította, hogy a komplex prímek:

a) az $1+i, 1-i, -1+i, -1-i$
b) a $4m+3$ alakú racionális prímszámok, mint például a 3, 7, 11, ...
c) a $4m+1$ alakú racionális prímszámok komplex tényezői. Ilyenek például a $2+3i, 2-3i$ komplex számok, mert ezek a $13=4\cdot 3+1$ racionális szám komplex tényezői, hiszen $13=(2+3i)(2-3i)$.

Bolyai az a)-típusú számokat *tökélyes prímeknek*, a b)-típusúakat *abszolút prímeknek* nevezi és megmutatja, hogy *2=(1+i)(1-i), valamint hogy 1+i nem írható fel két komplex egész szorzataként.*
A b)-típusú racionális prímekről Bolyai többféleképpen is bizonyítja, hogy *abszolút prímek*, az egyik legszebb bizonyítása:
“Ha a p prímszám 4m+3 alakú, akkor $p=t^2+u^2$ *nem lehetséges, mert ha t és u egyszerre páros vagy páratlan, akkor négyzeteik összege páros lenne, ami nem prímszám. Ha pedig t és u egyike páros, a másik páratlan, akkor ezek négyzeteinek összege 4m+1 alakú lenne. Tehát p abszolút prím.”*

Bolyai megmutatta, hogy az *m+ni* komplex egésznek az asszociáltjain kívül más osztója nincs, amennyiben $p=m^2+n^2$ prím. A c)-típusú prímeket kapcsolatba hozza Fermat karácsonyi tételével, amikor ezt írja:*“Minden 4m+1 alakú p prímszám két imaginárius prímszám szorzata, mivel minden ilyen szám két egész szám négyzetének összege.”* Például: $13=(2+3i)(2-3i)$

Az egyértelmű prímfelbontásra vonatkozó tételét így fogalmazza meg: “*Minden a+bi alakú komplex szám a tényezők sorrendjétől eltekintve, egyértelműen felbontható véges számú prímek szorzatára.”*

A 6. fejezet (*Az algebrai egyenletek elmélete*) felfedi Bolyai küzdelmét az ötöd és magasabbfokú algebrai egyenletek megoldhatóságával.
Bolyai sokszor említi Andreas von Ettingshausen (1796-1878) 1827-ben Bécsben kiadott *Vorlesungen über höhere Mathematik* kétkötetes művét [12], amelyben a szerző egy teljes fejezetet szentel a négynél magasabb fokú algebrai egyenletek megoldhatatlanságának és közli Paolo Ruffini (1765-1822) 1799-es bizonyítását[18] [23],[24].
Ugyanígy gyakran idézi Louis Lagrange (1736-1813) [20] könyvét, amely alapvetően azzal foglalkozik, hogy a négynél alacsonyabb fokú egyenletek megoldására használt módszerek miért nem használhatók a négynél magasabb fokú egyenletek megoldása esetén.[19]
Olvasmányai alapján Bolyai így ír: *„… a lehetlenségnek már az 5-rangra, tehát annyival inkább a még fölsőbb rangokra nézve bizonyítást adni: mit Ruffini a derék Ettingshausen-ben is meglévőleg, elmésen ugyan, de egy csomó hibával, egyszóval tehát csak képzeltképpen meg is tett.”*
Bolyai Ettinghausen könyvében olvasta a Ruffini-tétel bizonyítását, amelyben észrevette, hogy a bizonyítás hiányos. Ebből arra a következtetésre jutott, hogy a tétel nem érvényes, ezért elég sok energiát fordított a négynél magasabb fokú egyenletek megoldására. Így ír 1844-ben: *„Megcáfolásával egy (Ruffini által) az ilyettevés lehetlensége mutatásának … egy új úton eo ipso (magától értetődően) megmutattatik.”*

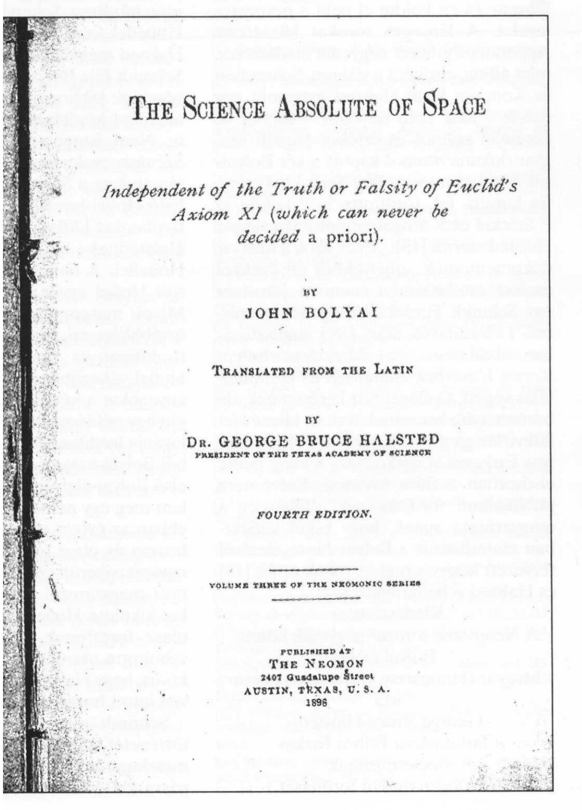
Ennek a fejezetnek végén összegezte Kiss Elemér: *„Bolyai János ezzel a fontos problémával sokáig foglalkozott anélkül, hogy tudta volna, hogy azt azelőtt már megoldották.”*
Mégis a Bolyai kéziratokban megtalálható, hogy sikerült kijavítania a Ruffini-tétel hibáit, és ezáltal számára teljes bizonyítást nyert, hogy a négynél magasabb fokú algebrai egyenletek algebrai úton általában nem oldhatók meg. Azonban amikor Bolyai János az ötöd- és ennél magasabb fokú egyenletek megoldására vonatkozó gondolatait papírra vetette, a matematikusok már ismerték Abel 1826-os bizonyítását. Erről, valamint Galois munkásságáról azonban Bolyai sohasem értesült. De sajnos a világ sem tudott arról, hogy a 19. század első felében a magyar matematikának is volt egy olyan tudósa, aki megoldotta az algebra egyik fontos tételét.

[18] Ruffini bizonyítása hiányos volt, majd 1826-ban megjelent cikkében Niels Henrik Abel (1802-1829) adta meg a teljes hibátlan bizonyítást. Tevékenységük elismeréseként a tételt *Abel–Ruffini tételként tartjuk számon: Az ötöd és magasabb fokú algebrai egyenleteknek nincs általános megoldási eljárása.*

[19] Ruffini és Abel munkássága felvetette annak tisztázását, hogy mi a szükséges és elegendő feltétele annak, hogy egy adott egyenlet algebrai eszközökkel megoldható legyen? Ennek a problémának a megoldását E.Galois (1811-1832) adta meg, amely elvezette a csoportelmélet megalapozásához.

Végül . . .

Itt kell megemlékezni *George Bruce Halsted* (1853-1922) amerikai matematikusról, aki minden más külföldi Bolyai kutatót megelőzve, 1896-ban ellátogatott Marosvásárhelyre és angolra fordította Bolyai János fő művét az Appendixet. Tevékenységével rendkívül sokat tett a két Bolyai nemzetközi elismeréséért.



THE SCIENCE ABSOLUTE OF SPACE

Independent of the Truth or Falsity of Euclid's Axiom XI (which can never be decided a priori).

BY

JOHN BOLYAI

TRANSLATED FROM THE LATIN

BY

DR. GEORGE BRUCE HALSTED

PRESIDENT OF THE TEXAS ACADEMY OF SCIENCE

FOURTH EDITION.

VOLUME THREE OF THE NEOMONIC SERIES

PUBLISHED AT

THE NEOMON

2407 Guadalupe Street

AUSTIN, TEXAS, U. S. A.

1896

George Bruce Halsted (1853-1922) amerikai matematikus már 1896-ban angolra fordította Bolyai János alapművét, az Apendixet

Irodalomjegyzék

[01] R.D. Carmichael: Note on a new number theory function, Amer. Math. Soc. Bull. 16(1910) 232-238

[02] R.D. Carmichael: On composite numbers P which satisfy the Fermat congruence $a^{P-1} \equiv 1 \pmod{P}$, Amer. Math. Monthly 19(1912) 22-27

[03] A. Cayley: The collected mathematical papers of Arthur Cayley (1889), vol. X. p. 38.

[04] J. Chernick*:* Solution of the general magic square, Amer. Math. Monthly 4(*1938*) 172–175.

[05] M. Cipolla: Sui numeri compositi P, che verificano la congruenza di Fermat $a^{P-1} \equiv 1 \pmod{P}$, Annali di Matematica, 9 (1904), 139-160

[06] J. Dénes, A.D. Keedwell: Latin squares and their applications, Academic Press, New York, Akadémiai Kiadó, Bp., English Universities Press, London, 1974.

[07] J. Dénes, T. Dénes: On the connections between RSA cryptosystem and the Fibonacci numbers, in: *Mathematical Properties of Sequences and Other Combinatorial Structures Kluwer Academic Publishers, Boston/Dordrecht/London, 2003. pp.199-206*

[08] T. Dénes: The great career of the „small Fermat theorem" in encryption of information, Híradástechnika, Budapest, 2002/2. 59-62

[09] T. Dénes: Complementary prime-sieve, PUre Mathematics and Applications, Vol.12 (2002), No. 2, pp. 197-207

[10] T. Dénes: Bolyai's treasure-chest (About the Book of Elemér Kiss), Magyar Tudomány, Budapest, 2006/5, 634-636

[11] P. Erdős: On the Converse of Fermat's theorem, Amer. Math. Monthly 56(1949) 623-624

[12] Andreas von Ettingshausen: Vorlesungen über die höhere Mathematik, Wiesbaden: LTR-Verlag, Neudr., 1827.

[13] C.F. Gauss: Theoria residuorum biquadraticorum, Commentatio secunda, Göttingische gelehrte Anzeigen, Göttingen 1831, Stück 64, 625-638.

[14] C.F. Gauss: Theoria residuorum biquadraticorum, Commentatio secunda, Commentationes Societatis Regiae Scientiarum Göttingensis Recentiores, Vol.VII.(1832), Göttingen, cl. math. 89-148.

[15] G.B. Halsted: The Science Absolute of Space (Translated from the original Latin), The Neomon, Austin, Texas, USA, 1891.

[16] J.H. Jeans: The Converse of Fermat's Theorem, Messenger of Mathematics, 27 (1897-1898), 174

[17] Kiss Elemér: Matematikai kincsek Bolyai János kéziratos hagyatékából (Mathematical Gems from the Bolyai Chests), Akadémiai Kiadó, Budapest, Typotex LTD., Budapest, 1999.

[18] E. Kiss, J.Sándor: On a congruence by János Bolyai connected with pseudoprimes, Methematica Pannonica, 15(2004), no.2., 283-288

[19] Krizek-Luca-Somer: 17 Lectures on Fermat Numbers, Springer Publishers, 2004.

[20] J.L. Lagrange: Réflexions sur la résolution algébrique des équations, Paris, 1770.

[21] R. Oláh-Gál, Sz. Máté: Virtual portrait of János Bolyai, 6-th International Conference on Applied Informatics, Eger, Hungary, January 27 - 31, 2004.

[22] R.G.E. Pinch: On using Carmichael numbers for public key encryption systems, Proceedings 6th IMA Conference on Coding and Cryptography, Cirencester 1997, (ed. M. Darnell) Springer Lecture Notes in Computer Science 1355 (1997) 265-269

[23] Paolo Ruffini: Teoria generale delle equazioni, in cui si dimostra impossibile la soluzione algebraica delle equazioni generali di grado superiore al 4°, 2 vols., Bologna, 1798.

[24] Paolo Ruffini: Della soluzione delle equazioni alg. determinate particolari di grado sup. al 4°, in: Mem. Soc. Ital., IX, 1802.