АПЕНДИКС

КОЈИ ИЗЛАЖЕ АПСОЛУТНО ИСТИНИТУ НАУКУ О ПРОСТОРУ, НЕЗАВИСНУ ОД ИСТИНИТОСТИ ИЛИ НЕИСТИНИТОСТИ ЈЕДАНАЕСТЕ ЕВКЛИДОВЕ АКСИОМЕ (ШТО СЕ НИКАДА АПРИОРИ НЕЋЕ МОЋИ ОДЛУЧИТИ), И КОМЕ ЈЕ ДОДАТА ГЕОМЕТРИЈСКА КВАДРАТУРА КРУГА У СЛУЧАЈУ НЕИСТИНИТОСТИ ОВЕ АКСИОМЕ

ОД

ЈАНОША БОЉАЈА

инжињерског капетана у аустријској војсци

ПРЕВЕО И ПРИМЕДБЕ ДОДАО

Д-р БРАНИСЛАВ ПЕТРОНИЈЕВИЋ

(ПРЕШТАМПАНО ИЗ „ПРОСВЕТНОГ ГЛАСНИКА)“

БЕОГРАД

ДРЖАВНА ШТАМПАРИЈА КРАЉЕВИНЕ СРБА, ХРВАТА И СЛОВЕНАЦА

1928.

Dr Branislav Petronijevic, az APPENDIX szerb nyelvű fordítója ezt a verses ajánlást fűzte a mű szerb nyelvű kiadásához (1928)

ЈАНОШУ БОЉАЈУ

— ПОСВЕТА —

Велико име, а мали спис,
Оставио си само Апендикс.
Геније млади, бујан си био,
И Гауса си њиме надмашио.

Гаус те истина хвалити стаде,
Али ти признање не одаде.
Малодушност је њега водити стала,
И на писмима га задржала.

Околина те ценити није знала,
Она те ружила, исмевала.
Гроб ти се задуго није знао,
Ни знак га није обележав'о.

И рођењем си несрећан био,
У малом си се народу појавио.
До тебе Мађар мали је био,
Великим ти си га учинио.

ПРЕВОДИЛАЦ.

BOLYAI JÁNOSHOZ

-Ajánlás -

Roppant név, a mű meg csöpp, nem disz:
Mit ránk hagytál, az csak egy Appendix.
Ifju lángelme, tenyész burjános:
Gausson túltettél, Bolyai János.

Gauss még hogyha dicsérni meg is mert,
Előbbre valónak ő el nem ismert.
Ülte kicsinyes irigység érte,
S levelezéssel bőven beérte.

Becsülni korod nem tudta nevedet,
Lenézve bántott, gúnnyal kinevetett.
Soká nem sejték, merre a sirod,
Jel sem volt sehol neveddel irott.

Születni nagy kegy nem kisért fölötte,
Hatalmas fajnak hogy lennél szülötte.
Népnek parány volt a magyar előtted,
Igazán naggyá magaddal tetted.

A fordító

A szerb vers magyar fordítója:
Túri Gábor mű- és szakfordító (Magyarkanizsa),
a Magyar Írószövetség és a MTA köztestületének tagja

ОБЈАШЊЕЊЕ ЗНАКОВА

ab означава *скуп свих* тачака које се са тачкама a и b налазе на једној правој.

$\overrightarrow{ab}$ означава ону половину праве $\overline{ab}$ која почиње у тачци a и садржи тачку b.

abc означава скуп *свих* тачака које се заједно са тачкама a, b, c (које не леже у истој правој) налазе у једној истој равни.

$\overrightarrow{abc}$ означава ону половину равни $\overline{abc}$ која почиње од праве $\overline{ab}$ и садржи тачку c.

abc означава онај од делова у које је раван $\overline{abc}$ подељена скупом полуправих $\overrightarrow{ba}$ и $\overrightarrow{bc}$ који је *мањи;* или *угао* чији су краци $\overrightarrow{ba}$ и $\overrightarrow{bc}$.

abcd означава (ако се тачка d налази у abc а $\overrightarrow{ba}$ и $\overrightarrow{cd}$ се не секу) део угла abc који је обухваћен од $\overrightarrow{ba}$, $\overrightarrow{bc}$ и $\overrightarrow{cd}$; док bacd означава део равни $\overline{abc}$ који се налази између $\overline{ab}$ и $\overline{cd}$.

R означава прав угао.

$\llcorner$ је знак за управан положај двеју правих.

$|||$ је знак за паралелизам.

$\equiv$ „ „ „ конгруенцију.

$ab \triangleq cd$ значи да је $cab = acd$.

$x \doteq a$ „ „ x тежи ка граници a.*

$\bigcirc r$ означава круг чији је полупречник r.

$\odot r$ означава површину круга чији је полупречник r.

---

* Да означи тежење граници, Бољај употребљава један други знак који смо ми заменили знаком $\doteq$ (као што је то учинио *Халстед* у своме енглеском преводу Апендикса).

АПЕНДИКС[1])

§ 1

Ако праву $\overrightarrow{am}$ не сече права $\overrightarrow{bn}$ али је сече свака друга права $\overrightarrow{bp}$ којасе налази у углу abn, онда је $\overrightarrow{bn}$ *па-ралелна* са $\overrightarrow{am}$, т.ј. $bn \mathbin{|||} am$ (фиг. 1).

Лако је увидети *да постоји* права $\overrightarrow{bn}$ и то *једна једина*, која пролази кроз тачку b (ван праве $\overrightarrow{am}$), и да $bam + abn$ није $> 2\,R$. Јер ако се bc буде кретала око b док не постане $bam + abc = 2\,R$, наступиће тренутак када $\overrightarrow{bc}$ *неће више* сећи $\overrightarrow{am}$, и тада ће бити $bc \mathbin{|||} am$.

Исто се тако лако увиђа да ће бити $bn \mathbin{|||} em$ па магде се тачка e налазила на am (претпостављајући да је у свима таквим случајевима $am > ae$).

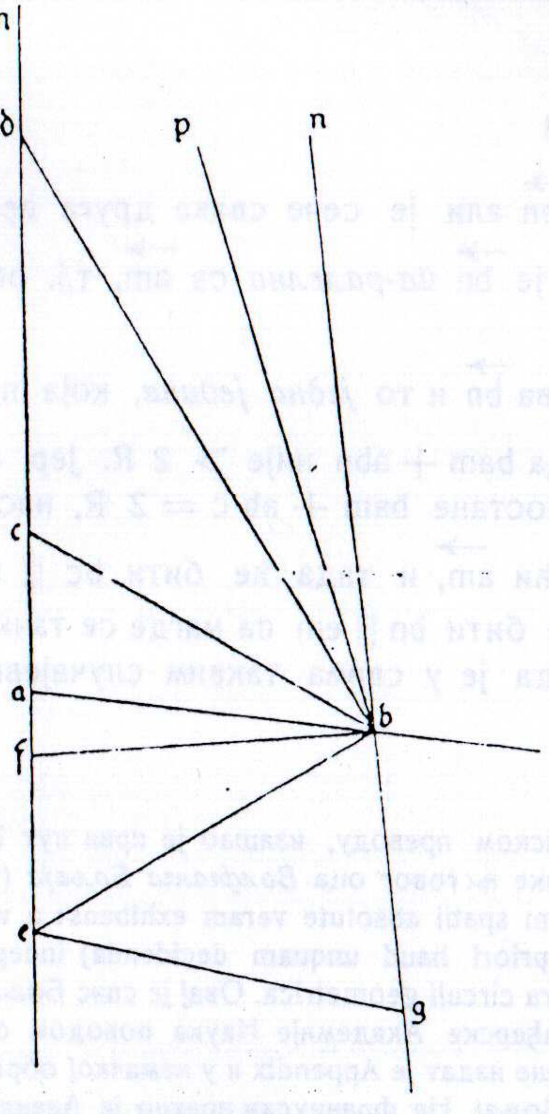
---

[1] Спис Бољајев, који доносимо у српском преводу, изашао је први пут 1832 као додатак уз опсежни уџбеник Математике његовог оца *Волфганга Бољаја* (тзв. Tentamen) под насловом: *Appendix* scientiam spatii absolute veram exhibens: a veritate aut falsitate Axiomatis XI Euclidei (a priori haud unquam decidenda) independentem: adjecta ad casum falsitatis quadratura circuli geometrica. Овај је спис Бољајев издат поново засебно 1902 г. од стране мађарске Академије Наука поводом стогодишњице Бољајевог рођења. 1913-те године издат је Appendix и у немачкој обради, коју је оставио за собом у рукопису сам Бољај. На француски превео је Апендикс *J. Hoüel* 1867 г. под насловом „La science absolue de l'espace" (ново издање 1912-е), а на енглески амерички математичар *G. B. Halsted* 1896 под насловом „The Science Absolute of Space".

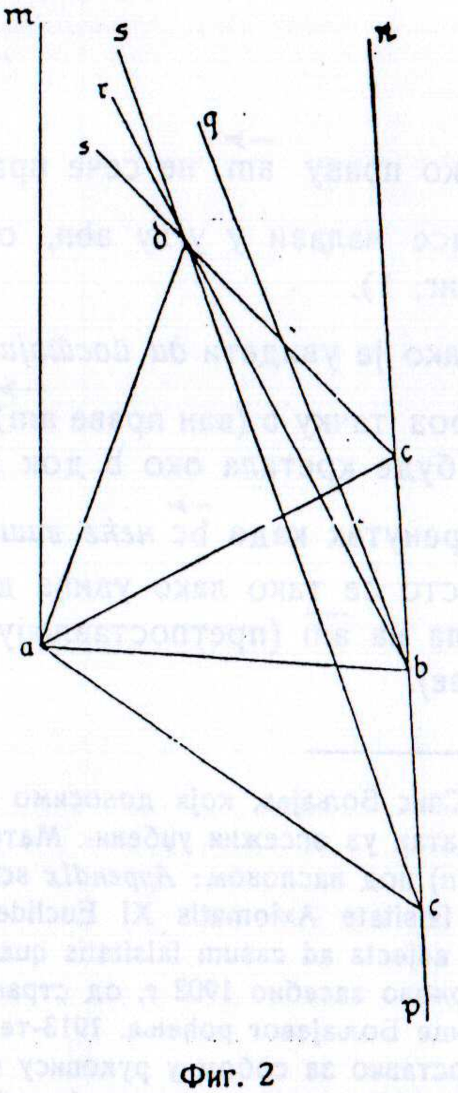
При моме преводу Апендикса употребљени су на првом месту латински оригинал и немачка обрада, али узети су у помоћ и француски и енглески превод. Број додатих примедаба релативно је много мањи него што је тај број у моме преводу *Лобачевсковог* списа „Геометријска Испитивања из Теорије паралелних линија" (изашлом у „Просветном Гласнику" за 1914-у год.). Читаоца који хоће потпуно да разуме Бољаја упућујем на тај спис Лобачевскога и мој коментар.

Ако је, док се тачка c на правој $\overrightarrow{am}$ удаљава у бесконачност, увек $cd = cb$, биће увек и $cdb = cbd$ ($< nbc$). Како пак $nbc \mathrel{\underset{\cdot}{=}} o$, то и $cdb \mathrel{\underset{\cdot}{=}} o$.

Напомена. У овом првом параграфу даје Бољај у првом одељку *дефиницију паралелне;* у другоме одељку доказује став, да на једној страни паралелизма постоји *само једна* паралелна; а у трећем став да је положај тачке e на правој am *произвољан.*



Фиг. 1



Фиг. 2

§ 2

Ако је $bn \,|||\, am$ биће и $cn \,|||\, am$ (фиг. 2).

Јер узмимо да се d налази магде у macn. Ако се c налази на $\overrightarrow{bn}$, $\overrightarrow{bd}$ сећи ће am (пошто је $bn \,|||\, am$), а тако исто и $\overrightarrow{cd}$ сећи ће $\overrightarrow{am}$. Ако се пак c налази на $\overrightarrow{bp}$, нека је $bq \,|||\, cd$. Тада ће се $\overrightarrow{bq}$ налазити у abn (§ 1) и сећи $\overrightarrow{am}$, а тако исто ће и $\overrightarrow{cd}$ сећи $\overrightarrow{am}$. Према томе ће свака полуправа $\overrightarrow{cd}$ (у acn) сећи увек полуправу $\overrightarrow{am}$, док $\overrightarrow{cn}$ неће сећи $\overrightarrow{am}$. Стога ће бити увек $cn \,|||\, am$.

Напомена. У овом другом параграфу Бољај доказује став, да једна паралелна *задржава* ознаку паралелизма у *свима* својим тачкама.

§ 3

Ако су како br тако и $cs \,|||\, am$ (фиг. 2), а c се не налази на $\overrightarrow{br}$, $\overrightarrow{br}$ и $\overrightarrow{cs}$ неће се сећи.

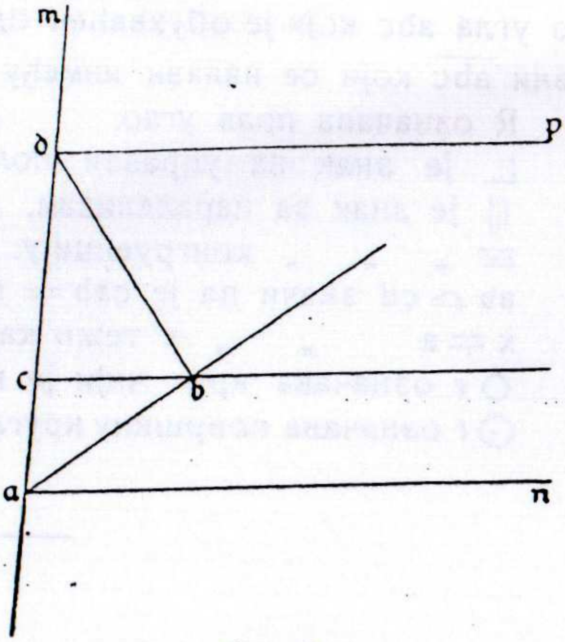
Јер ако би $\overrightarrow{br}$ и $\overrightarrow{cs}$ имале једну заједничку тачку d, онда би (по §-у 2) како dr тако и ds биле обе паралелне са am и $\overrightarrow{dr}$ и $\overrightarrow{ds}$ пале би уједно (по §-у 1), а c би се налазило на $\overrightarrow{br}$ (противно претпоставци).

Напомена. У трећем параграфу доказује Бољај, да се две праве које су паралелне са трећом *не секу* једна са другом (што још не значи да су оне и међу собом паралелне).

§ 4

Ако је $man > mab$ (фиг. 3), свакој тачци b на $\overrightarrow{ab}$ одговараће једна тачка c на $\overrightarrow{am}$ тако да буде $bcm = nam$.

Јер ако се (према §-у 1) учини да је $bdm > nam$ и $mdp = man$, b ће се налазити у $nadp$. Стога ако се nam буде покретало дуж am док се $\overrightarrow{an}$ не поклопи са $\overrightarrow{dp}$, $\overrightarrow{an}$ мораће проћи кроз b и према томе ће морати постојати једно bcm које је $= nam$.



Фиг. 3

§ 5

Ако је $bn \,|||\, am$, постојеће на $\overline{am}$ једна таква тачка f да ће бити $fm \simeq bn$ (фиг. 1).

Јер (по § 1) постојаће $bcm > cbn$, и, ако је $ce = cb$, биће $ec \simeq bc$ и $bem < ebn$. Ако тачку p будемо кретали дуж дужи ec[2], означавајући непрестано угао bpm са u а угао pbn са v, биће u очевидно најпре мање па затим веће од одговарајућег v. Јер u

[2] Да би читалац лакше разумео Бољајево доказивање, треба да у фиг. 1-ој уцрта двапута тачку p (и то једанпут између a и c ближе c, а други пут између f и e ближе e) и да је споји са тачком b.

расте *непрекидно* од bem до bcm, а (по §-у 4) нема ниједног угла $> bem$ и $< bcm$ с којим се угао u неби поклопио. Тако исто и v опада непрекидно од ebn до cbn. Према томе постојаће на ec једна таква тачка f да ће бити $bfm = fbn$.

§ 6

Ако је $bn \,|||\, am$ и тачка e магде на $\overline{am}$ а тачка g магде на $\overline{bn}$, биће $gn \,|||\, em$ и $em \,|||\, gn$ (фиг. 1).

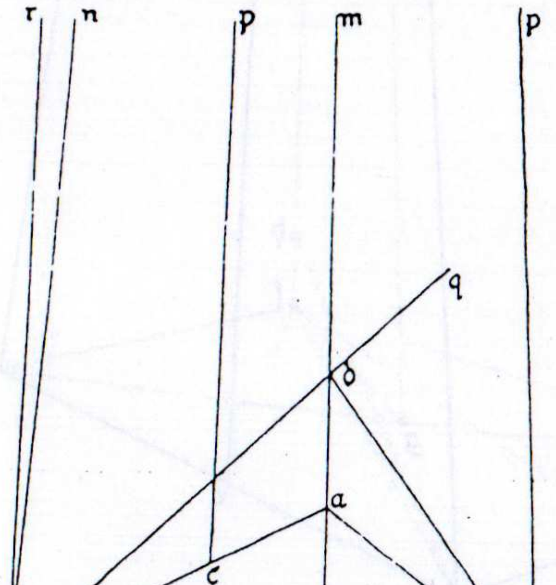
Јер по (§-у 1) bn је $|||$ em, па је (по §-у 2) и $gn \,|||\, em$. Ако је даље $fm \bumpeq bn$ (§ 5) биће $mfbn \equiv nbfm$, па према томе (пошто је $bn \,|||\, fm$) и $fm \,|||\, bn$ и (према претходно реченоме) $em \,|||\, gn$.

Напомена. У шестом параграфу Бољај доказује став о *узајамности паралелизма:* ако је једна права паралелна са другом *онда је и ова друга* паралелна *са првом.*

§ 7

Ако су како bn тако и cp пораление са am а тачка c не налази се на $\overrightarrow{bn}$, биће и $bn \,|||\, cp$ (фиг. 4).

Јер bn и cp се не секу једна са другом (§ 3); даље су am, bn, cp или у истој равни или нису; и у првом случају am или се налази у $bncp$ или се не налази.



Фиг. 4

Ако се am, bn, cp налазе у истој равни и am лежи у $bncp$, тада ће свака полуправа $\overrightarrow{bq}$ (у nbc) сећи $\overline{am}$ у извесној тачци d (пошто је $bn \,|||\, am$). Како је пак $dm \,|||\, cp$ (§ 6), јасно је да ће $\overrightarrow{dq}$ сећи $\overrightarrow{cp}$ и да ће бити $bn \,|||\, cp$.

Ако се bn и cp налазе с исте стране од am, једна од њих, напр. cp, налазиће се између друге две[4] (између $\overline{bn}$ и $\overline{am}$). Али како свака $\overrightarrow{bq}$ (у nba) сече am, сећи ће свака и $\overrightarrow{cp}$. Према томе биће $bn \,|||\, cp$.

Ако равни mab и mac заклапају *угао*, онда cbn и abn имају само $\overrightarrow{bn}$ заједничко, док am (у abn) нема ничег заједничког са $\overrightarrow{bn}$, а тако исто ничег заједничког ни nbc и $\overrightarrow{am}$.

[3] Овај други случај не налази се у фиг. 4. Читалац може лако направити засебну фигуру у којој ће cp лежати између bn и am и у којој ће bq сећи am.

Тада ће свака полураван $\overrightarrow{bcd}$, постављена кроз $\overrightarrow{db}$ (дату у nba), сећи $\overrightarrow{am}$, пошто (услед $bn \,|||\, am$) $\overrightarrow{bd}$ сече $\overrightarrow{am}$. Стога ако будемо кретали полураван $\overrightarrow{bcd}$ око bc дотле док она престане сећи $\overrightarrow{am}$, $\overrightarrow{bcd}$ пашће напослетку уједно са $\overrightarrow{bcn}$. Из истог разлога она ће се поклопити и са $\overrightarrow{bcp}$. Према томе bn налазиће се и у bcp. Осим тога ако је $br \,|||\, cp$, br ће се (пошто је $am \,|||\, cp$) налазити из истог разлога у bam, а тако исто (пошто је $br \,|||\, cp$) и у bcp. Према томе $\overrightarrow{br}$, будући заједничко равнима mab и pcb, биће у ствари идентично са bn и стога биће $bn \,|||\, cp$.

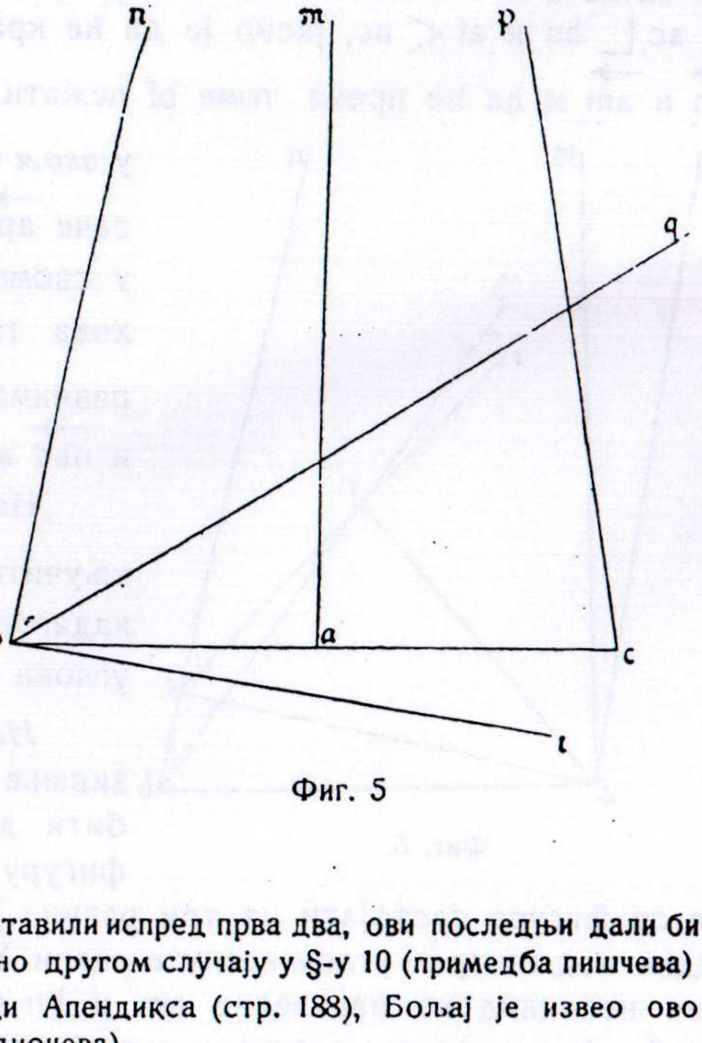
Ако је дакле $cp \,|||\, am$ и b ван cam, пресек $\overrightarrow{bn}$ равни bam и bcp биће паралелан како са am тако и са cp.*

Напомена. У седмом параграфу Бољај доказује став о *транзитивности паралелизма*: ако су две праве паралелне трећој оне су паралелне и међу собом. Он разликује три случаја: у првом случају трећа се права налази између правих које су са њом паралелне, у другом случају праве паралелне с трећом налазе се на истој страни од ње, а у трећем случају ова трећа права лежи ван равни других двеју.

§ 8

Ако је $bn \,|||\, и \bumpeq cp$ (или краће $bn \,|||\, \bumpeq cp$) и ако am (у $nbcp$) на дужи bc *стоји управно* и *полови* је, биће $bn \,|||\, am$ (фиг. 5).

Јер ако би $\overrightarrow{bn}$ секла $\overrightarrow{am}$, и $\overrightarrow{cp}$ секла би $\overrightarrow{am}$ у истој тачци (пошто је $mabn \equiv macp$) која би била заједничка и за $\overrightarrow{bn}$ и



Фиг. 5

* Ако бисмо овај трећи случај ставили испред прва два, ови последњи дали би се доказати краће и елегантније, слично другом случају у §-у 10 (примедба пишчева).

Доиста у својој немачкој обради Апендикса (стр. 188), Бољај је извео ово обрнуто доказивање (примедба преводиочева).

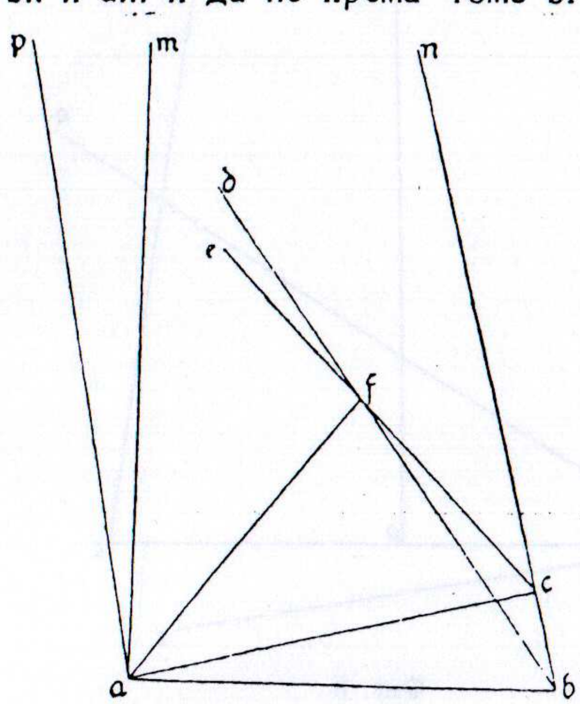
$\overrightarrow{cp}$, пошто је $bn \,|||\, cp$. Али свака $\overrightarrow{bq}$ (у cbn) сече $\overrightarrow{cp}$; тако исто сече $\overrightarrow{bq}$ и $\overrightarrow{am}$. Према томе је $bn \,|||\, am$.

Напомена. Овај параграф чини прелаз од првих седам параграфа Апендикса, у којима је изложена *теорија паралелних*, ка параграфима 9—24, у којима се излаже теорија тзв. граничне линије и граничне површине.

§ 9

Ако је $bn \,|||\, am$, $map \perp mab$ (фиг. 6) и угао, кога раван nbd заклапа са равни nba (на истој страни од $mabn$ на којој је map), $< R$, онда раван map сече раван nbd.

Јер нека је $bam = R$, $ac \perp bn$ (при чему или b пада уједно са c или не пада) и $ce \perp bn$ (у nbd), тада ће (по претпоставци) бити $ace < R$ и af ($\perp ce$) пашће у ace. Нека је $\overrightarrow{ap}$ пресек равни abf и $\overrightarrow{amp}$ (којима је тачка a заједничка), па ће бити угао $bap = bam = R$ (пошто је $bam \perp map$). Ако се напослетку $\overrightarrow{abf}$ кретањем стави у abm (при чему ће тачке a и b остати непомичне), $\overrightarrow{ap}$ ће пасти уједно са $\overrightarrow{am}$; а пошто је $ac \perp bn$ и $af < ac$, јасно је да ће крајња тачка f од af пасти између $\overrightarrow{bn}$ и $\overrightarrow{am}$ и да ће према томе bf лежати у оквиру угла abn. Али како у *овом* положају (пошто је $bn \,|||\, am$) $\overrightarrow{bf}$ сече $\overrightarrow{ap}$, то ће се $\overrightarrow{ap}$ и $\overrightarrow{bf}$ морати сећи и у своме *првобитном* положају, и њихова тачка пресека биће заједничка равнима $\overrightarrow{map}$ и $\overrightarrow{nbd}$. Према томе $\overrightarrow{map}$ и $\overrightarrow{nbd}$ морају се сећи.



Фиг. 6.

На основу реченога лако је закључити, да ће се $\overrightarrow{map}$ и $\overrightarrow{nbd}$ увек сећи кадагод је сума њихових нагибних углова са равни $mabn < 2R$.

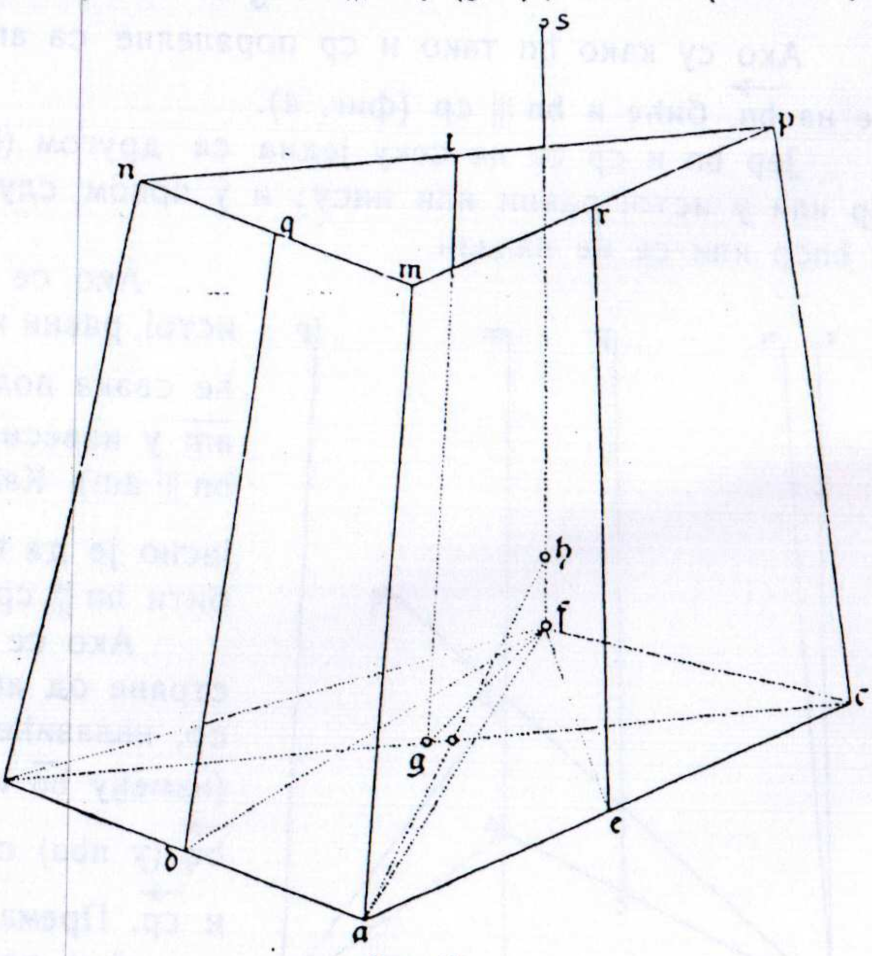
Напомена. Да би разумео доказивање у овом параграфу, најбоље ће бити да читалац направи просторну фигуру која ће одговарати фиг. 6. Та ће се фигура састојати из три равни: једне основне, једне управне и једне под оштрим углом нагнуте равни. У основној равни треба уцртати две несвклидске паралелне am и bn и $ac \perp bn$; на управној равни треба (с унутрашње стране њене) уцртати ap; а на нагнутој равни треба најпре с обе стране уцртати се ∟ bn, затим са спољашње стране повући полуправу bd тако да се она сече са се у тачци f, и напослетку на унутрашњој страни повући полуправу bf.

§ 10

Ако је како bn тако и cp ||| ≏ am, биће и bn ||| ≏ cp (фиг. 7).

Јер равни mab и mac или заклапају угао или сачињавају исту раван.

Ако је прво случај, нека је полураван $\overrightarrow{\mathrm{qdf}}$ управна на праву ab у средишној тачци њеној. Тада ће бити dq ∟ ab, па према томе и dq ||| am (§ 8). Тако исто ако је $\overrightarrow{\mathrm{ers}}$ управна на ac у њеној средишној тачци, биће er ||| am, па према томе dq ||| er (§ 7). Одатле се лако да закључити (на основу §-а 9-ог), да ће се полуравни $\overrightarrow{\mathrm{qdf}}$ и $\overrightarrow{\mathrm{ers}}$ сећи једна с другом и да ће њихов пресек $\overrightarrow{\mathrm{fs}}$ бити ||| dq (§ 7); затим (пошто је bn ||| dq) биће и fs ||| am. Осим тога (за сваку тачку полуправе $\overrightarrow{\mathrm{fs}}$) биће fb = fa = fc, и $\overrightarrow{\mathrm{fs}}$ пашће у полураван $\overrightarrow{\mathrm{tgf}}$, која је управна у средишту праве bc. Тако исто биће (по §-у 7), пошто је fs ||| bn, gt ||| cp. Али како је gt управно на правој bc у њеном средишту, биће tgbn ≡ tgcp (§ 1) и bn ||| ≏ cp.



Фиг. 7

Ако се bn, am и cp налазе у истој равни, претпоставимо да се fs налази ван ове равни и да је ||| ≏ am. Тада ће (на основу овде ре ченога) бити fs ||| ≏ како у односу на bn тако и у односу на cp, па ће према томе бити и bn ||| ≏ cp.

Напомена. Пошто је у §-у 7-ом доказао поред главног става и став (види последњу алинеју тога параграфа), да је пресек двеју равни положених кроз две паралелне праве паралелан са ове две праве, а у §-у 9-ом став, да се две равни положене кроз две паралелне праве једне треће равни секу кад је збир њихових нагибних углова са овом трећом равни мањи од 2 R, Бољај у овом параграфу доказује став, да постоји не само транзитивност паралелизма (двеју правих са трећом) него и транзитивитет једнакости њихових углова паралелизма.

§ 11

Скуп од тачке a и од *свих* других тачака, од којих је свака тачка b таква да је, кад је bn ||| am, у исто доба и bn ≏ am, назваћемо F; а пресек од F са макојом равни, која у себи садржи праву ab, назваћемо L.

На свакој правој, која је ||| am, F има једну и то само једну тачку. Тако исто јасно је, да ће L бити подељено правом am у два конгруентна дела. Стога ћемо $\overrightarrow{am}$ назвати *осом* од L. Даље јасно је, да постоји само једно L са осом $\overrightarrow{am}$ у свакој равни која у себи садржи праву am. Према томе свако L ове врсте назваћемо *L осе* $\overrightarrow{am}$ (наравно за раван која се посматра). Лако је увидети, да ће L обртањем око праве am описати F, које ће имати такође $\overrightarrow{am}$ за осу, и обрнуто F ће бити *F осе* $\overrightarrow{am}$.

Напомена. У овом параграфу уводи Бољај, на основу ставова доказаних у §§ 8, 9 и 10, појмове линије L и површине F. Он доказује даље (у §-у 16) да је L у евклидовој геометрији права, а у §-у 17-ом да је у неевклидовој Геометрији L крива линија а F крива површина. Кривој линији L дао је Лобачевски назив *гранична линија* (орицикл), а кривој површини F назив *гранична површина* (орисфера).

§ 12

Ако се тачка b налази магде на L-у осе $\overrightarrow{am}$ и ако је bn ||| ≏ am (§ 11), L осе $\overrightarrow{am}$ и L осе $\overrightarrow{bn}$ падаће уједно.

Јер, ако L осе $\overrightarrow{bn}$ означимо са l, нека је тачка c магде на l и cp ||| ≏ bn (§ 11). Тада ће бити (пошто је и bn ||| ≏ am) cp ||| ≏ am (§ 10), те ће према томе c пасти и на L. А ако је c магде на L, и cp ||| ≏ am, тада ће бити cp ||| ≏ bn (§ 10), те ће према томе c пасти и на l. L и l мораће дакле бити идентични, и свака полуправа $\overrightarrow{bn}$ биће оса и од L и биће ≏ у односу на све друге осе од L.

Напомена. У овом параграфу Бољај доказује став, да кроз дату тачку b једне полуправе $\overrightarrow{bn}$ пролази само једна гранична линија (лиција L), за коју је та полуправа оса. Да би разумео доказ, читалац треба да направи фигуру двеју граничних линија L и l (облик граничне линије налази се у фиг. 9) које пролазе кроз тачку b њихове заједничке осе bn (друга оса од L нека је am, а од l нека је cp и обрнуто).

§ 13

Ако је bn ||| am и cp ||| dq a bam + abn = 2 R, биће и dcp + cdq = 2 R (фиг. 8).

Јер нека је ea = eb и efm = dcp (§ 4), па ће бити (пошто је bam + abn = 2 R = abn + abg) ebg = eaf. Тако исто, ако је bg = af, биће △ ebg ≡ △ eaf, угао beg = aef и g ће се налазити на полуправој $\overrightarrow{fe}$. Даље ће бити gfm + fgn = 2 R (пошто је egb = efa). Тако исто је и gn ||| fm (§ 6). Према томе, ако је mfrs ≡ pcdq, биће rs ||| gn (§ 7), и r ће лежати на правој fg или између тачака f и g или ван њих (ако није cd = fg, у ком би случају истинитост става била очевидна).

I. У првом случају frs не може бити веће од (2 R — rfm =) fgn, пошто је rs ||| fm[5]; тако исто не може бити ни frs < fgn, пошто је rs ||| gn[6]; према томе је frs = fgn и rfm + frs = gfm + fgn = 2 R. Дакле је dcp + cdq = 2 R.

II. Ако се r налази изван fg, биће ngr = mfr. Нека је mfgn ≡ ≡ nghl ≡ lhko и т. д. све док fk не постане = fr или док не почне да премаша fr. У оба ова случаја биће ko ||| hl ||| fm (§ 7). Ако k пада у r, ko ће падати уједно са rs (§ 1), и имаћемо rfm + frs = kfm + + fko = kfm + fgn = 2 R. Ако се пак r налази између h и k, биће (на основу под I реченог) rhl + hrs = 2 R = rfm + frs = dcp + cdq.

Напомена. У овоме параграфу доказује Бољај став, да ако је збир унутрашњих углова које заклапају две паралелне праве са трансверзалом = 2 R у *једном* случају да тај збир мора бити = 2 R и у *свима* другим случајевима. Друкчије речено, ако важи Евклидов постулат паралелних (т.ј. постулат једне једине паралелне) у једном случају, он важи у свима случајевима (дотичне површине).

§ 14

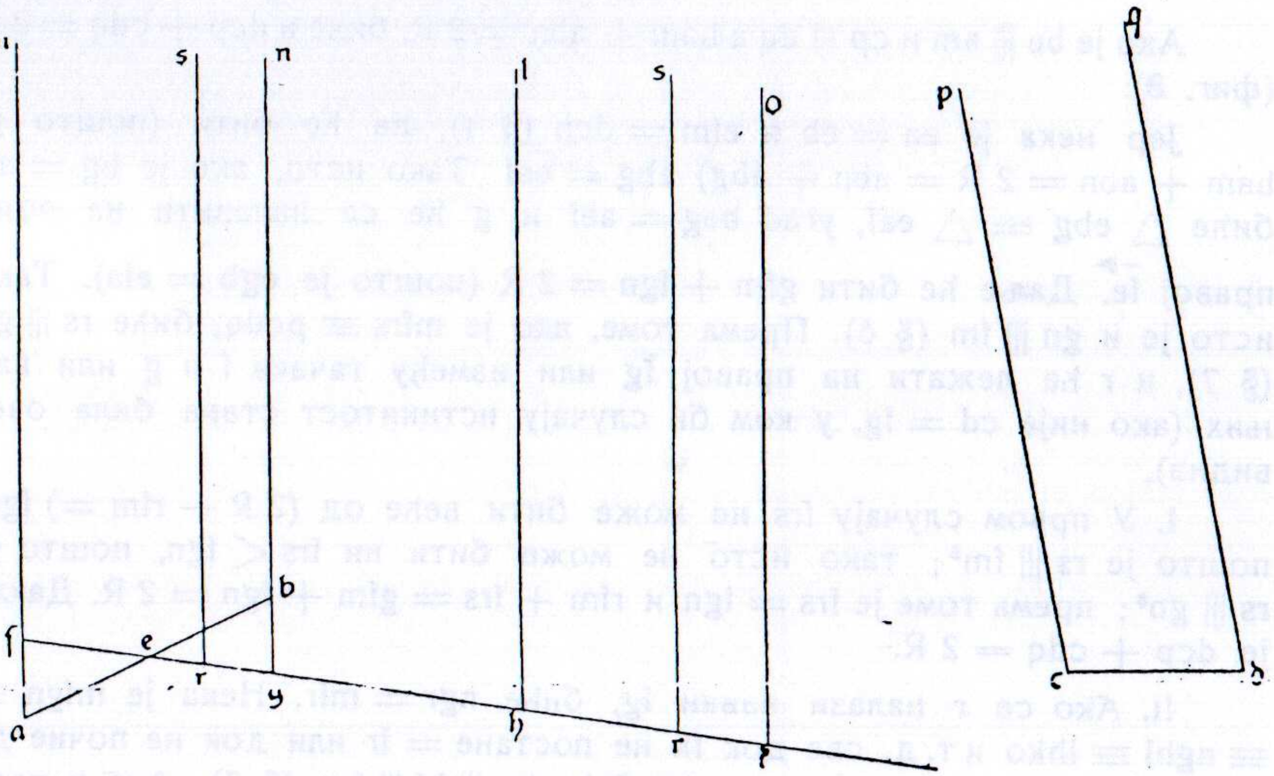
Ако је bn ||| am. cp ||| dq и bam + abn < 2 R, биће и dcp + cdq < 2 R (фиг. 8).

[5] Кад би угао frs био > fgn, онда би (пошто је rfm + fgn = 2 R) било rfm + frs > 2 R, а то је немогуће (по §-у 1), пошто је rs ||| fm.

[6] Кад би било frs < fgn, онда би (пошто је frs + grs = 2 R) било fgn + + grs > 2 R, а то је немогуће (по §-у 1) пошто је rs ||| gn.

Ако наиме dcp + cdq неби било < 2 R, онда би оно (по §-у 1) морало бити = 2 R. Тада би пак (по §-у 13) морало бити и bam + + abn = 2 R, а то противречи претпоставци.

Напомена. У овом параграфу доказује Бољај став, да ако је збир унутрашних углова које заклапају две паралелне праве са трансверзалом < 2 R у *једном* случају да тај збир мора бити < 2 R у *свима*



Фиг. 8

случајевима. Друкчије речено, ако важи неевклидски постулат паралелних (т.ј. постулат двеју паралелних) у једном случају, он важи у свима случајевима (дотичне површине).

§ 15

На основу посматрања изнетих у §§-има 13 и 14 *систем геометрије заснован на претпоставци истинитости XI-е Евклидове аксиоме означићемо са Σ, а са S означићемо систем заснован на супротној хипотези. Сви они ставови, за које није изречно речено да важе било у систему Σ или у систему S, важе апсолутно, т.ј. за њих се тврди да су истинити па било да важи систем Σ било систем S.*

Напомена. Да има ставова који су независни од постулата паралелних, то је увидео још Евклид у својим славним *„Елементима"*. У првој књизи свога дела Евклид чини употребу од петог постулата (одн. 11-е аксиоме) тек у 29-ом ставу, док првих 28 ставова доказује независно од овог постулата. Тиме што поред Евклидовог уводи и неевклидски систем, Бољај наглашава изречно важност геометријских ставова који су независни од постулата једне или двеју паралелних. Стога он и у наслову Апендикса истиче као његов главни задатак излагање статова „који важе апсолутно“.

§ 16

Ако је am оса од L, у систему Σ биће L права $\perp$ am (фиг. 5).

Јер нека је bn у тачци b на L (такође) оса од L, тада ће у систему Σ бити $bam + abn = 2\,bam = 2\,R$, према томе биће $bam = R$.[7] И ако је c макоја тачка праве ab и cp $|||$ am, биће (по §-у 13) cp $\bumpeq$ am, и c ће се према томе налазити на L (§ 11).

Али у систему S не постоје три тачке a, b, c ни у L ни у F које би лежале у правој линији.

Јер једна од три осе am, bn, cp (напр. am) мора лежати између друге две[8], те ће (по §-у 14) како bam тако и cam морати бити $<$ R.

Напомена. Из овог параграфа излази, да је L у евклидовом систему права линија управна на осу, а у неевклидовом једна крива иниј а (види идући параграф).

§ 17

L је и у систему S линија, а F површина.

Јер (по §-у 11) свака раван повучена управно на осу $\overrightarrow{am}$ (из тачке која припада F-у) сече F по периферији једног круга, чија раван (по §-у 14) није управна ни на једној другој оси $\overrightarrow{bn}$[9]. Ако будемо обртали F око bn свака тачка F-а остаће (по §-у 12) у њему, и пресек F-a са равни која није управна на $\overrightarrow{bn}$[10] описаће површину. И макоје две тачке a, b узели на F, F ће (по §-у 12) бити тако са собан конгруентно, да ће a и b пасти уједно. Према томе F ће бити једна *униформна површина.*

Јасно је из овога да ће (према §§-има 11 и 12) L бити *униформна линија.**

---

[7] Према дефиницији линије L (упор. § 11 у вези са §-ом 8), свака тетива њена мора заклапати једнаке углове са осама у крајним тачкама тетиве. Према томе у Евклидовом систему мора, пошто је $bam = abn$ a $bam + abn = 2\,R$, bam бити $= R$.

[8] Осе се имају замислити у једној истој равни (као што и Бољај додаје у својој немачкој обради Апендикса — упор. н. н. м. s. 191). Како су bam и cam мањи од R, тетиве ab и ac (одн. тачке a, b и c) неће лежати у правој линији.

[9] Наравно да тачка F-a, кроз коју се повлачи раван управно на осу $\overrightarrow{am}$, не може при томе бити сама тачка a (почетна тачка осе).

[10] А то ће рећи пресек F-a са равни која је управна на $\overrightarrow{am}$ (а тај је пресек периферија круга). Упор. и немачку обраду Апендикса (§ 17), н. н. м. стр. 191.

* Није нужно ограничити доказ на систем S; доказ се лако може формулисати тако да важи апсолутно (за S и Σ).

Примедба пишчева.

Напомена. Униформна линија и униформна површина значе линију и површину константне кривине. Права и круг су униформне линије у Евклидовој равни, а раван и површина кугле су униформне површине у Евклидовом простору. У неевклидској равни постоје четири униформне линије: права, гранична линија, линија једнаког остојања и круг (линија једнаког остојања јавља се у Апендиксу први пут у §-у 27).

§ 18

Свака раван повучена косо кроз тачку a површине F на осу $\overrightarrow{am}$ сече F у систему S по периферији једног круга (фиг. 7).

Јер нека су a, b и c три тачке овога пресека, а bn и cp осе. Тада ће равни ambn и amcp заклапати угао, пошто би иначе (на основу §-а 16) раван одређена тачкама a, b и c садржавала у себи am (противно претпоставци). Према томе ће се равни управне на правима ab и ac у њиховим средиштима сећи (§ 10) по извесној оси fs (F-a) и бити fa = fb = fc. Нека је ah ⊥ fs и нека се fah обрће око fs; тада ће a описати кружну периферију полупречника ha, која ће пролазити кроз тачке b и c и налазити се *у исто доба* и у површини F и у равни $\overline{abc}$. И раван $\overline{abc}$ и површина F имаће заједничку само ○ ha (§ 16).

Исто тако јасно је, да ће и крајна тачка a одсечка fa линије L обртањем око f у површини F описати ○ ha.

Напомена. У овом параграфу доказао је Бољај став, да се круг на граничној површини поклапа својим обимом са кругом неевклидске равни (као што се круг на површини кугле поклапа својим обимом са кругом Евклидове равни).

§ 19

Управна bt на осу bn линије L (у равни ове линије) у систему S је *тангента* линије L (фиг. 5).

Јер L има са bt само тачку b заједничку (§ 14). Али ако се bq налази у равни tbn, средиште кружног пресека равни која је управна на tbn у bq са F осе $\overrightarrow{bn}$ налазиће се очевидно (§ 18) такође на bq. А ако је bq пречник јасно је, да ће $\overrightarrow{bq}$ сећи линију L осе $\overrightarrow{bn}$ у тачци q.

Напомена. Да би разумео доказ овог параграфа, читалац треба најпре да замисли фиг. 5 упрошћену тако, да се она састоји само из правих bn, bq и bt. Затим треба да замисли једну раван повучену кроз bq управно на раван tbn и у тој управној равни круг описан из средишта праве bq. Напослетку треба да повуче граничну линију која ће пролазити кроз тачке b и q и имати $\overrightarrow{bn}$ за осу.

§ 20

Две тачке површине F одређују увек једну L — линију (§ 11 и 18). Како је (на основу §§ 16 и 19) линија L управна на свима својим осама, *то је сваки линеарни угао у површини F*[11] *једнак нагибном углу равни повучених управно на површину F кроз краке линеарног угла.*

§ 21

Две L — линије $\overrightarrow{ap}$, $\overrightarrow{bd}$ *у истој површини F које са трећом L — линијом* заклапају унутрашње углове чији је збир $< 2R$ (фиг. 6), секу се једна с другом. (Са ap означићемо линију L површине F повучену кроз тачке a и p, а са $\overrightarrow{ap}$ ону половину ове линије која почињући у a садржи тачку p).

Јер ако су am и bn осе површине F, полуравни $\overrightarrow{amp}$ и $\overrightarrow{bnd}$ сећи ће се једна с другом (§ 9), и F ће се сећи са њиховим пресеком (по §§-има 7 и 11), Према томе мораће се и $\overrightarrow{ap}$ и $\overrightarrow{bd}$ сећи једна с другом.

На основу овога јасно је, да ће, ако се на површини F замене праве L — линијама,[12] Евклидова XI-а аксиома и све оно што се у (равној) геометрији и трепонометрији тврди важити *апсолутно* и у F. Према томе биће на тој површини и тригонометријске функције узете у истом смислу као у систему Σ, тако исто и периферија круга, чији је L — линијски полупречник $= r$ у F, биће $= 2\pi r$, и $\odot r$ (у F) $= \pi r^2$ (подразумевајући под π половину од $\bigcirc 1$ у F, или познати број 3,1415926...).

Напомена. 1. У овом параграфу Бољај доказује најпре став, да на површини F за линије L важи пети постулат Евклидов,[13] па затим на основу тога става изводи закључак, да за F — површину важи Евклидова геометрија.

---

[11] Т. ј. угао кога заклапају две L — линије.

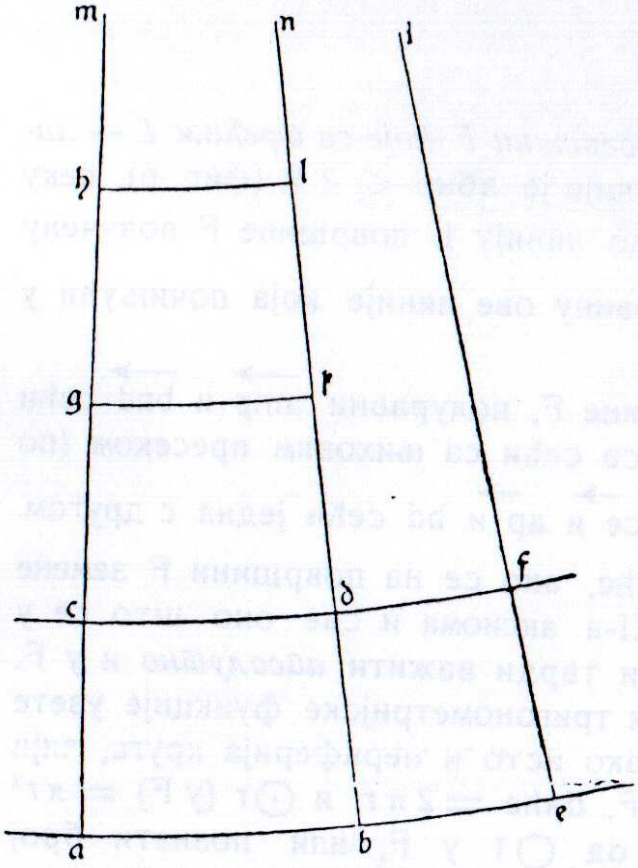
[12] Друкчије речено, ако се L — линије сматрају као праве (одн. као најкраће линије између две тачке) на F — површини.

[13] Евклидов пети постулат (одн. XI-и аксиом), онако како га је Евклид формулисао (у почетку прве књиге „Елемената"), гласи овако:

„Ако су две праве пресечене трећом тако, да ова заклапа са њима на истој страни углове чији је збир мањи од 2R, онда ће се те две праве довољно продужене сећи на оној страни на којој су углови чији је збир мањи од 2R".

Овај је постулат еквивалентан са постулатом једне паралелне (т. ј. са ставом: *„из једне тачке ван једне праве може се повући само једна паралелна"* само ако се не узме у обзир могућност Риманове геометрије. Пошто Бољај не познаје ову могућност, он с правом идентификује оба постулата.

Напомена 2. Да би разумео доказ става, по коме пети Евклидов постулат важи за L — линије у F, читалац треба да направи једну просторну фигуру која ће одговарати фиг. 6. Та ће се фигура састојати из четири равни: једне основне и три на њој нагнуте равни. У основној равни треба уцртати праве ap и bd, које ће са трансверзалом ab заклапати унутрашње углове, чији ће збир бити мањи од 2 R: ова основна раван престављаће површину F, а праве ap, bd и ab луке L — линија. У равни, која ће са основном равни имати заједнички пресек ab, треба уцртати паралелне осе am и bn и кроз њих поставити равни apm и nbd. Ове последње мораће се сећи на основу доказа у §-у 9 (и на основу просторне фигуре поменуте у напомени уз тај параграф).



Фиг. 9

§ 22

Ако је $\overrightarrow{ab}$ L — линија осе $\overrightarrow{am}$ и тачка c на $\overrightarrow{am}$, и ако се угао cab (кога склапају полуправа $\overrightarrow{am}$ и L — линија $\overrightarrow{ab}$) помера најпре дуж ab па затим дуж $\overrightarrow{ba}$ и то оба пута до у бесконачност, путања $\overline{cd}$ тачке c биће L — линија осе $\overrightarrow{cm}$ (фиг. 9).

Јер нека је d макоја тачка на $\overline{cd}$ (коју ћемо ниже означити са l), dn ||| cm и b тачка од L која се налази на $\overrightarrow{dn}$. Тада ће бити $bn \stackrel{\frown}{=} am$ а $ac = bd$, према томе биће и $dn \stackrel{\frown}{=} cm$ и d ће се налазити на l.[14] Ако је пак d на l и $dn \stackrel{\frown}{=} cm$, и ако тачка b линије L припада и правој $\overline{dn}$, биће и $am \stackrel{\frown}{=} bn$ и $cm \stackrel{\frown}{=} dn$, из чега очевидно следује да је $bd = ac$, да d пада на путању тачке c и да се l и $\overline{cd}$ поклапају.[15] Однос једне такве линије l са L означићемо са l || L.[16]

Напомена. Главна садржина овог параграфа је став, да су две граничне линије са истим осама свуда подједнако удаљене једна од друге.

[14]) Овим је доказано тврђење, да је путања $\overline{cd}$ тачке c идентична са l осе $\overrightarrow{cm}$.

[15] Овим је доказано обрнуто тврђење, да је l осе $\overrightarrow{cm}$ идентично са путањом $\overline{cd}$ тачке c.

[16] Знак || обележава подједнаку удаљеност двеју линија једне од друге.

§ 23

Ако су L — линије cdf $\parallel$ abe (§ 22), ab $=$ be и $\overrightarrow{am}$, $\overrightarrow{bn}$, $\overrightarrow{ep}$ осе, биће очевидно и cd $=$ df.[17] И ако су a, b, e три макоје тачке линије $\overrightarrow{ab}$ и ab $= n \cdot$ cd, биће и ae $= n \cdot$ cf. Према томе биће (очевидно и кад су ab, ae, dc несамерљиви) ab : cd $=$ ae : cf, а пропорција ab : cd *независна* од ab и *одређена потпуно* раздаљином ac. Однос ab : cd означићемо великим словом (напр. X), које ће одговарати истоименом малом слову (напр. x) којим ћемо означити ac.

§ 24

Макоју дужину да имају x и y, биће увек $Y = X^{\frac{y}{x}}$ *(§ 23).*

Јер или ће x и y бити множине једно од другог или неће.

Ако је $y = nx$, нека је $x = ac = cg = gh$ итд. док не буде $ah = y$ и нека је даље cd $\parallel$ gk $\parallel$ gl;[18] па ће бити

$$X = ab : cd = cd : gk = gk : hl,$$

$$\frac{ab}{hl} = \left(\frac{ab}{cd}\right)^n,$$

или

$$Y = X^n = X^{\frac{y}{x}}.$$ [19]

Ако су x, y множине од i, т. ј. $x = mi$ и $y = ni$, биће (према реченоме)

$$X = I^m, \; Y = I^n;$$

дакле

$$Y = X^{\frac{n}{m}} = X^{\frac{y}{x}}.$$ [20]

Исти резултат да се лако проширити и на случај кад су x и y несамерљиви. Ако би било $q = y - x$, биће очевидно $Q = Y : X$.[21]

Немање је очевидно, да је у систему Σ за свако x, $X = 1$. Док је у S — систему $X > 1$, и за макоје вредности од ab и abe постоје такве линије cdf $\parallel$ abe да је cdf $=$ ab, одакле следује да ће бити ambn $\equiv$ amep

---

[17] Пошто се паралелне праве приближују једна другој на страни паралелизма, биће при томе ab $>$ cd.

[18] Упреди фиг. 9.

[19] Пошто је $\frac{ab}{hl} = \frac{ab}{cd} \cdot \frac{cd}{gk} \cdot \frac{gk}{hl}$ и $\frac{ab}{cd} = \frac{cd}{gk} = \frac{gk}{hl}$, то ће очевидно бити $\frac{ab}{hl} = \left(\frac{ab}{cd}\right)^n$. Како је $\frac{ab}{hl} = Y$, $\frac{ab}{cd} = X$ и $n = \frac{y}{x}$, то је $Y = X^{\frac{y}{x}}$.

[20] Као што је за $y = nx$, $Y = X^n$, тако ће за $x = mi$ бити $X = I^m$ (и за $y = ni$ бити $Y = I^n$), одакле следује $I = \sqrt[m]{X}$. Према томе биће $Y = \left(\sqrt[m]{X}\right)^n = X^{\frac{n}{m}}$.

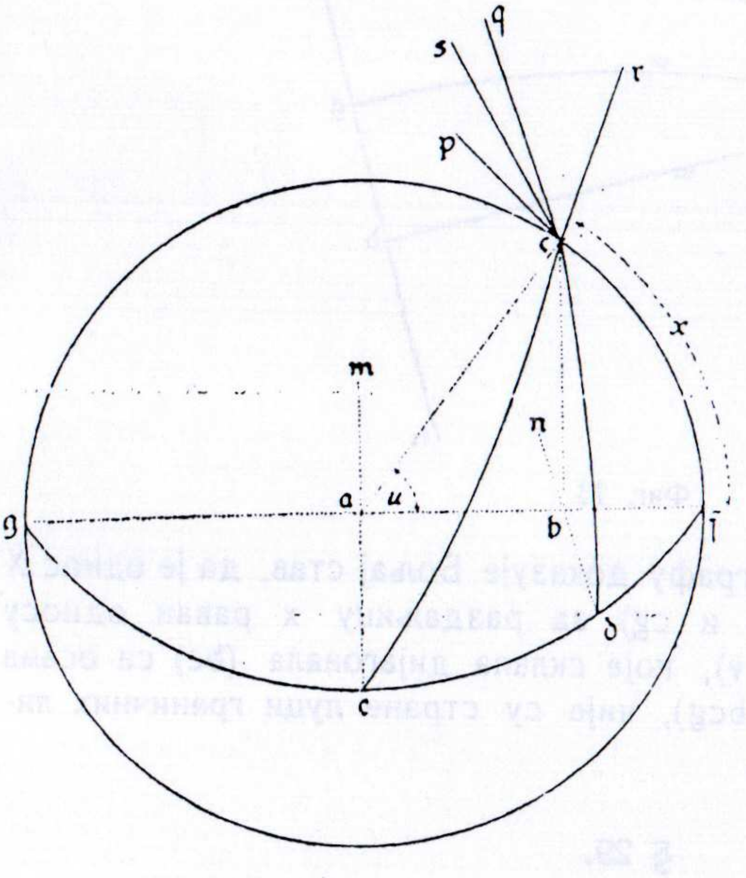
[21] За раздаљину q двеју граничних линија биће $Q = X^{\frac{q}{x}}$ одакле следује $Q = X^{\frac{y-x}{x}} = X^{\frac{y}{x} - 1} = \frac{X^{\frac{y}{x}}}{X} = Y : X.$

и ако је ова друга фигура произвољна множина оне прве;[22] ово последње је један парадоксан резултат али резултат који не доказује апсурдност система S.

Напомена. Пошто је извео формулу за однос два гранична лука, Бољај при крају овог параграфа утврђује посредно и став, да су све граничне линије међусобом конгруентне (као што су све праве међу собом конгруентне).

§ 25.

У сваком праволинијском троуглу кружне периферије с полупречницима једнаким странама троугла односе се као синуси супротних углова (фиг. 10).



Фиг. 10

Јер нека је $abc = R$ и $am \perp bac$, и нека су bn и $cp \,|||\, am$. Тада ће бити $cab \perp ambn$,[23]) према томе (пошто је $cb \perp ba$) $cb \perp ambn$[24]) дакле $cpbn \perp ambn$.[25]) Нека F осе $\overrightarrow{cp}$ сече праве $\overline{bn}$, $\overline{am}$ у одговарајућим тачкама d, e, и пруге cpbn, cpam, bnam у L — линијама cd, ce, de. Тада ће бити (по §-у 20) $cde =$ нагибном углу равни ndc, nde, и према томе $= R$; из истог разлога биће угао $ced = cab$. У L — линијском троуглу ced биће (по §-у 21):

$$ec : dc = 1 : \sin dec = 1 : \sin cab$$

Тако исто биће (по §-у 21):

$$ec : dc = \bigcirc ec : \bigcirc dc \quad (\text{у } F)$$
$$= \bigcirc ac : \bigcirc bc \quad (\S\ 18).$$

Према томе биће и

$$\bigcirc ac : \bigcirc bc = 1 : \sin cab,$$

одакле следује важење става и за сваки троугао.[26])

---

[22]) Друкчије речено, маколико пута amep садржавало у себи ambn, те две фигуре биће једна с другом конгруентне (кад се наиме осе $\overrightarrow{am}$, $\overrightarrow{bn}$ и $\overrightarrow{ep}$ замисле продужене у бесконачност на страни њиховог паралелизма). Ова конгруенција почива на конгруенцији свих L — линија међусобно.

[23]) По ставу да, кад је једна права управна на некој равни, да је и свака раван положена кроз праву управна на тој равни.

[24]) По ставу да, ако је једна права управна на пресеку двеју управних равни а лежи у једној од њих, да је та права управна на другој равни.

[25]) Пошто је $bn \perp cb$.

[26]) Пошто се сваки троугао који није правоугли да раставити у два правоугла (упор. немачку обраду Апендикс, н. н. м. S. 195).

§ 26.

У сваком сферном троуглу синуси страна односе се као синиси супротних углова (фиг. 11).

Јер нека је ạbc = R и ced управно на полупречнику кугле oa. Тада ће бити ced $\perp$ aob[27]) и (пошто је и boc $\perp$ boa) cd $\perp$ ob.[28]) Како је у троуглима ceo, cdo (по §-у 25):

$$\bigcirc ec : \bigcirc oc : \bigcirc dc = \sin coe : 1 : \sin cod$$
$$= \sin ac \ : 1 : \sin bc,$$

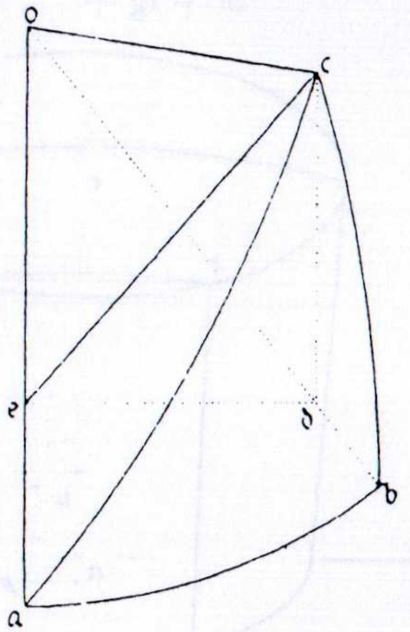
и како је (§ 25):

$$\bigcirc ec : \bigcirc dc = \sin cde : \sin ced,$$

то ће бити:

$$\sin ac : \sin bc = 1 : \sin a$$

Како се из овог става да извести целокупна сферна тригонометрија, то је тиме утврђена њена независност од XI-е Евклидове аксиоме.[29])



Фиг. 11

§ 27.

Ако су ac и bd управне на ab и ако се cab помера дуж $\overline{ab}$, биће (означавајући путању тачке c са cd)[30]) cd : ab = sin u : sin v (фиг. 12).

Јер нека је de $\perp$ ca; у троуглима ade, adb биће (по §-у 25):

$$\bigcirc ed : \bigcirc ad : \bigcirc ab = \sin u : 1 : \sin v.$$

Ако се bacd буде обртало око ac, тачка b описаће ○ab, а тачка d, ○ed, а површину описану од путање cd означићемо са ⊙cd.[31]) Нека је даље bfg.... полигон уписан у ⊙ab. Ако кроз стране bf, fg и т. д. овог полигона будемо поставили равни управне на ⊙ab, у ⊙cd постаће полигонална фигура од истог броја страна. Тада се може доказати, као и у §-у 23, да је:

$$cd : ab = dh : bf = hk : fg = \ldots$$ [32])

и да је према томе

$$dh + hk + \ldots : bf + fg + \ldots = cd : ab.$$

---

[27]) По ставу поменутом у прим. 23.

[28]) По ставу да је, кад су две равни управне на трећој, и њихов пресек управан на овој трећој равни.

[29]) Друкчије речено, тригонометрија на куглк у неевклидском простору идентична је са тригонометријом на кугли у Евклидовом простору.

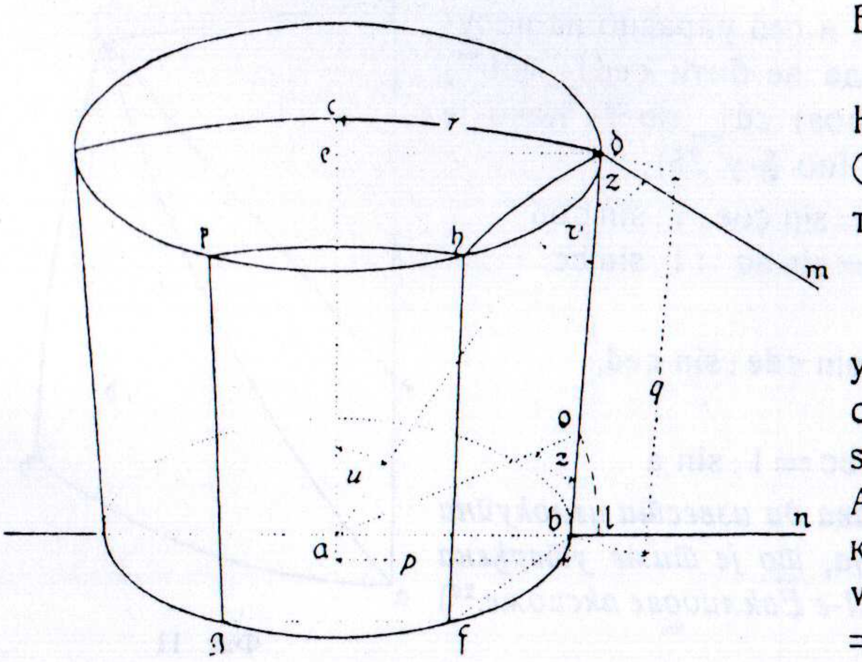
[30]) Путања cd цреставља *линију једнакої остојања* у односу на праву ab.

[31]) Површина описана од линије једнакої остојања cd је *површина једнакої остојања*, а ⊙ cd је кружна површина на тој површини описана полупречником cd.

[32]) Лако се да показати, да ће управне које деле праву ab на n једнаких делова поделити и линију једнаког остојања cd на n једнаких делова. Према томе однос cd : ab биће константан и зависан само од остојања ac. Пошто су стране полигоналне фигуре dhk... линије једнаког остојања, то ће очевидно бити cd : ab = dk : bf и т. д.

Ако се свака од ових страна смањи на нулу као граничну вредност, биће:

$$bf + fg + \ldots\ldots \doteq \bigcirc ab \text{ и } dh + hk + \ldots\ldots \doteq \bigcirc ed.$$



Фиг. 12

Биће дакле и

$$\bigcirc ed : \bigcirc ab = cd : ab.$$

Како је пак

$$\bigcirc ed : \bigcirc ab = \sin u : \sin v$$

то ће бити

$$cd : ab = \sin u : \sin v.$$

Ако се ac удаљи од bd у бесконачност, остаће cd : ab па према томе и sin u : sin v *констаншни*. А како $u \doteq R$ (§ 1) и како, ако је $\overrightarrow{dm} \parallel \overrightarrow{bn}$, $v \doteq z$, биће $cd : ab = 1 : \sin z$.[33])

Путању cd означићемо са cd || ab.[34])

Напомена. На основу става доказаног у §-у 25, у овом параграфу доказује Бољај став, да је однос између једне праве и њене линије једног остојања (однос cd : ab) раван 1 : sin z, т. ј. раван реципрочној вредности синуса угла паралелизма за остојање тих двеју линија.

§ 28.

Ако је $bn \parallel\doteq \overrightarrow{am}$, ако се c налази на am и ако је $ac = x$, биће (§ 23) $X = \sin u : \sin v$ (фиг. 13).

Јер ако су cd и ae управне на bn и bf ⊥ am, биће (као у §-у 27) $\bigcirc bf : \bigcirc cd = \sin u : \sin v$.[35]) Како је пак очевидно $bf = ae$,[36]) то је:

$$\bigcirc ea : \bigcirc dc = \sin u : \sin v.$$

---

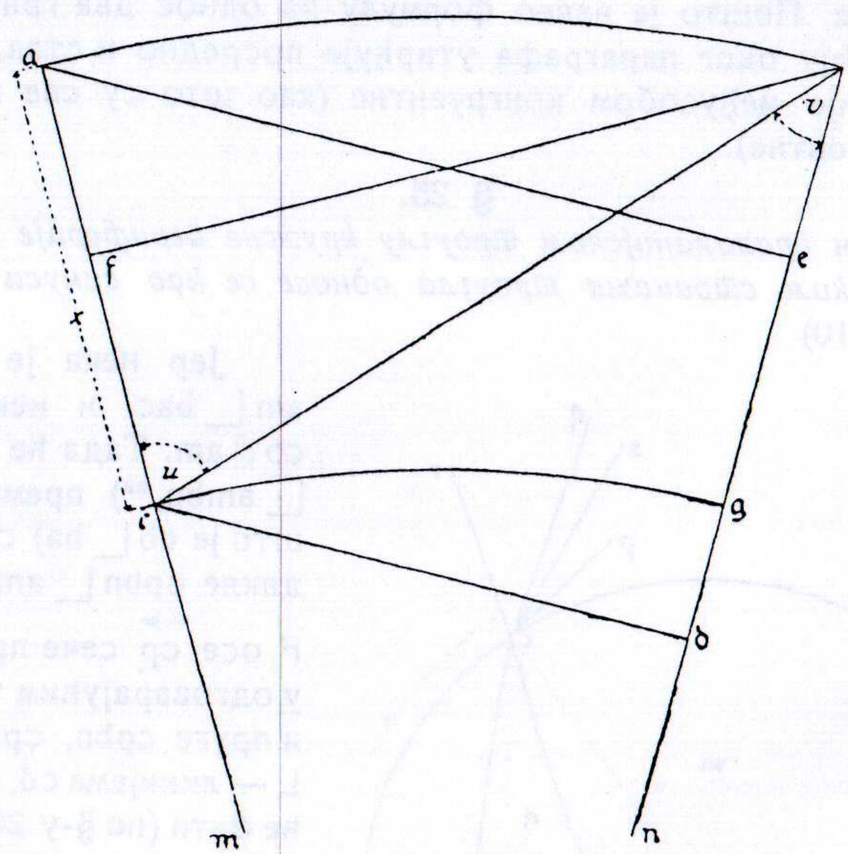
[33]) Што се год тачака a буде у фиг. 12 удаљавала више од тачке b, угао dab постајаће све мањи тако да ће у бесконачности бити $u = R$, da постаће || $\overrightarrow{ba}$ и v ће се претворити у угао паралелизма за остојање bd ($\overrightarrow{dm} \parallel \overrightarrow{bn}$ биће паралелна на другој страни паралелизма и $z = v$).

[34]) Што ће рећи да је cd свуда подједнако удаљено од ab (упор. прим. 16), одн. да је cd линија једнаиог остојења у односу на ab (упор. прим. 30).

[35]) По ставу доказаном у §-у 25 биће (у правоуглом троуглу bfc) $\bigcirc bf : \bigcirc bc = \sin u : 1$ и (у пчавоуглом троуглу bdc) $\bigcirc cd : \bigcirc bc = \sin v : 1$, дакле $\bigcirc bf : \bigcirc cd = \sin u : \sin v$.

[36]) Ако у фиг. 13 повучемо тетиву ab, биће (према дефиницији граничне линије) ∢ mab = ∢ nba, правоугли троугли abf и abe биће конгруентни и $bf = ae$.

Али пошто је (по §-у 21) у F — површинама оса am и cm (које секу ambn у L — линијама ab и cg) ◯ea : ◯dc = ab : cg = X, то ће бити и X = sin u : sin v.



Фиг. 13

Напомена. У овом параграфу доказује Бољај став, да је однос X двају граничних лукова (ab и cg) за раздаљину x раван односу између синуса углова (u и v), које склапа дијагонала (bc) са осама (am и bn) у четвороуглу (abcg), чије су стране луци граничних линија и одсечци њихових оса.

§ 29.

Ако је bam = R, ab = y и bn ||| am, биће у систему S:

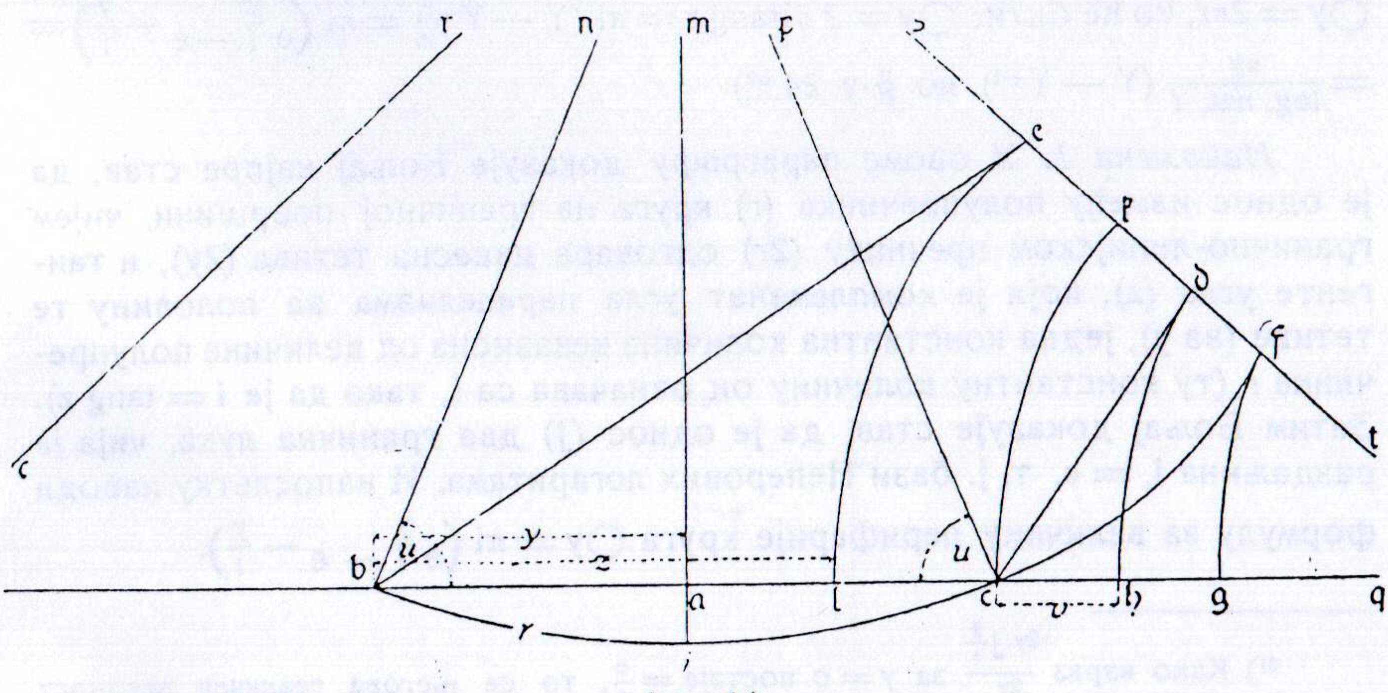
$$Y = \operatorname{cotg} \frac{1}{2} u \quad (\text{фиг. } 11).$$

Јер ако је ab = ac и cp ||| am (према томе bn ||| ≏ cp) и pcd = qcd, постојаће (§ 19) $\overrightarrow{ds}$ ⊥ cd, тако да је ds ||| cp, према томе (§ 1) и dt ||| cq.[37]

[37]) Права cd, која полови угао pcq, својом дужином одређена је тако да она преставља остојање за угао паралелизма pcd (= qcd). Према томе полуправа $\overrightarrow{ds}$, која је управна на cd, биће ||| cp, и $\overrightarrow{dt}$ ||| $\overrightarrow{cq}$.

Ако је даље be $\perp$ ds, биће (§ 7) ds ||| $\overrightarrow{bn}$, према томе (§ 6) bn ||| es, и (пошто је dt ||| cq) bq ||| et. Дакле је (§ 1) ebn = ebq.[38])

Нека је bcf L — линија осе bn, и нека су fg, dh, ck и el L — линије оса ft, dt, cq и et. Тада ће бити очевидно (§ 22) hg = df = dk = hc[39]) и cg = 2ch = 2v. Тако исто јасно је да је bg = 2bl = 2z. Али како је



Фиг. 14

bc = bg — cg, са чега је y = z — v,[40]) то ће бити (§ 24) Y = Z : V.[41]) Напослетку имаћемо (§ 28):

$$Z = 1 : \sin \frac{1}{2} u^{42)} \text{ и } V = 1 : \sin \left(R - \frac{1}{2} u \right)^{43)}, \text{ дакле } Y = \operatorname{cotg} \frac{1}{2} u.$$

---

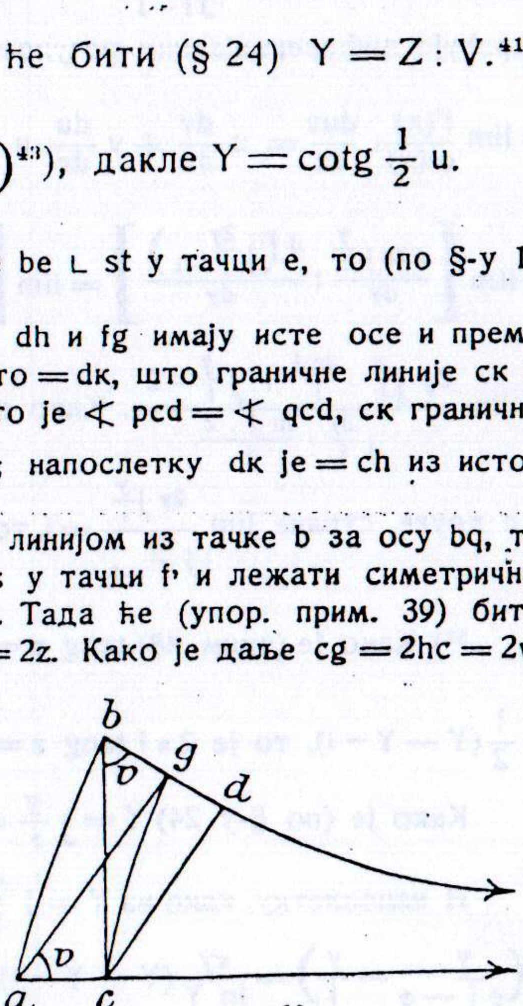
38) Пошто је $\overrightarrow{bn}$ ||| $\overrightarrow{es}$ и bq ||| et и пошто је be $\perp$ st у тачци e, то (по §-у 1) мора be половити угао nbq.

39) hg биће зато = df, што граничне линије dh и fg имају исте осе и према томе подједнако одстоје једна од друге; df је зато = dk, што граничне линије ck и cf леже симетрично у односу на управну cd (пошто је ∢ pcd = ∢ qcd, ck гранична линија за осу $\overrightarrow{cq}$, а cf гранична линија за осу $\overrightarrow{cp}$); напослетку dk је = ch из истог разлога из ког је df = hg.

40) Ако се фиг. 14 допуни једнем граничном линијом из тачке b за осу bq, та ће граничнв линија сећи продужење полуправе es у тачци f' и лежати симетрично са граничном линијом bf у односу на управну be. Тада ће (упор. прим. 39) бити ef = ef', ef = lg, ef' = bl, дакле bl = lg и bg = 2bl = 2z. Како је даље cg = 2hc = 2v, bc = 2y и bc = bg — gc, то је y = z — v.

41) Упор. прим. 21.

42) Да би се увидела истинитост овог израза, треба Бољајево доказивање у прошлом параграфу допунити оним специјалним случајем у коме се остојање двеју граничних линија поклапа са остојањем управне из једне крајне тачке њихове на оси која полази из друге крајне тачке. Тај случај престављен је у фиг. 1'. Из фигуре



сл. 1'

Напомена. У овом параграфу, који преставља кључ неевклидске тригонометрије, изводи Бољај став, да је однос два гранична лука (Y) раван котангенти половине угла паралелизма који одговара остојању једнаком раздаљини (y) та два лука.

§ 30.

Лако се (према §-у 25) да увидети, да решење проблема *равне Тригонометрије* у систему S захтева изражавање периферије круга помоћу полупречника. А ово се може постићи ректификацијом L - линије (фиг. 15).

Нека су ab, cm и cm' управне на $\overrightarrow{ac}$, и b макоја тачка полуправе $\overrightarrow{ab}$. Тада ће бити (§ 25): $\sin u : \sin v = \bigcirc p : \bigcirc y$ и $\sin u' : \sin v' = \bigcirc p : \bigcirc y'$; дакле: $\frac{\sin u}{\sin v} \bigcirc y = \frac{\sin u'}{\sin v'} \bigcirc y'$.

Али како је по (§-у 27) $\sin v : \sin v' = \cos u : \cos u'$,[44]) то ће бити:

$$\frac{\sin u}{\cos u} \bigcirc y = \frac{\sin u'}{\cos u'} \bigcirc y'$$

или $\bigcirc y : \bigcirc y' = \operatorname{tang} u' : \operatorname{tang} u = \operatorname{tang} w : \operatorname{tang} w'$.

Нека су даље cn ||| ab, c' n' ||| ab и cd, c'd' L — линије управне на $\overrightarrow{ab}$. Тада ће бити (§ 21) и $\bigcirc y : \bigcirc y' = r : r'$, дакле биће $r : r' = \operatorname{tang} w : \operatorname{tang} w'$.

Нека сада расте p почињући од a до у бесконачност; тада ће $w \doteq z$ и $w' \doteq z'$, са чега ће бити $r : r' = \operatorname{tang} z : \operatorname{tang} z'$.[45])

Означимо *константни* однос $r : \operatorname{tang} z$ (који је *независан* од r) са i. Ако је $y \doteq o$, биће: $\frac{r}{y} = \frac{i \operatorname{tang} z}{y} \doteq 1$,[46]) и према томе $\frac{y}{\operatorname{tang} z} \doteq i$.[47])

следује да је (по §-у 25) $\bigcirc bc : \bigcirc cd = 1 : \sin v$, дакле и (пошто је ag = bc) $\bigcirc ag : \bigcirc cd = 1 : \sin v$ и (по §-у 18) $ab : cg = 1 : \sin v$.

Како је z раздаљина граничних линија bf' (прим. 40) и le и како углу v у фиг. 1' одговара угао $\frac{1}{2}u$ у фиг. 14, то ће (на основу последње формуле) бити $Z = bf' : le = 1 : \sin \frac{1}{2} u$.

[43]) На основу извођења у претходној примедби лако је увидети, да ће за граничне линије ck и dh, чија је раздаљина v, бити $V = 1 : \sin\left(R - \frac{1}{2}u\right) = 1 : \cos \frac{1}{2} u$.

[44]) Из фиг. 12 у §-у 27 следовало је, да је $cd : ab = \sin u : \sin v = \text{const}$. Како u (и u') у фиг. 15 одговарају углу R — u у фиг. 12, то ће овде очевидно бити $\cos u : \sin v = \cos u' : \sin v'$ или $\cos u : \cos u' = \sin v : \sin v'$.

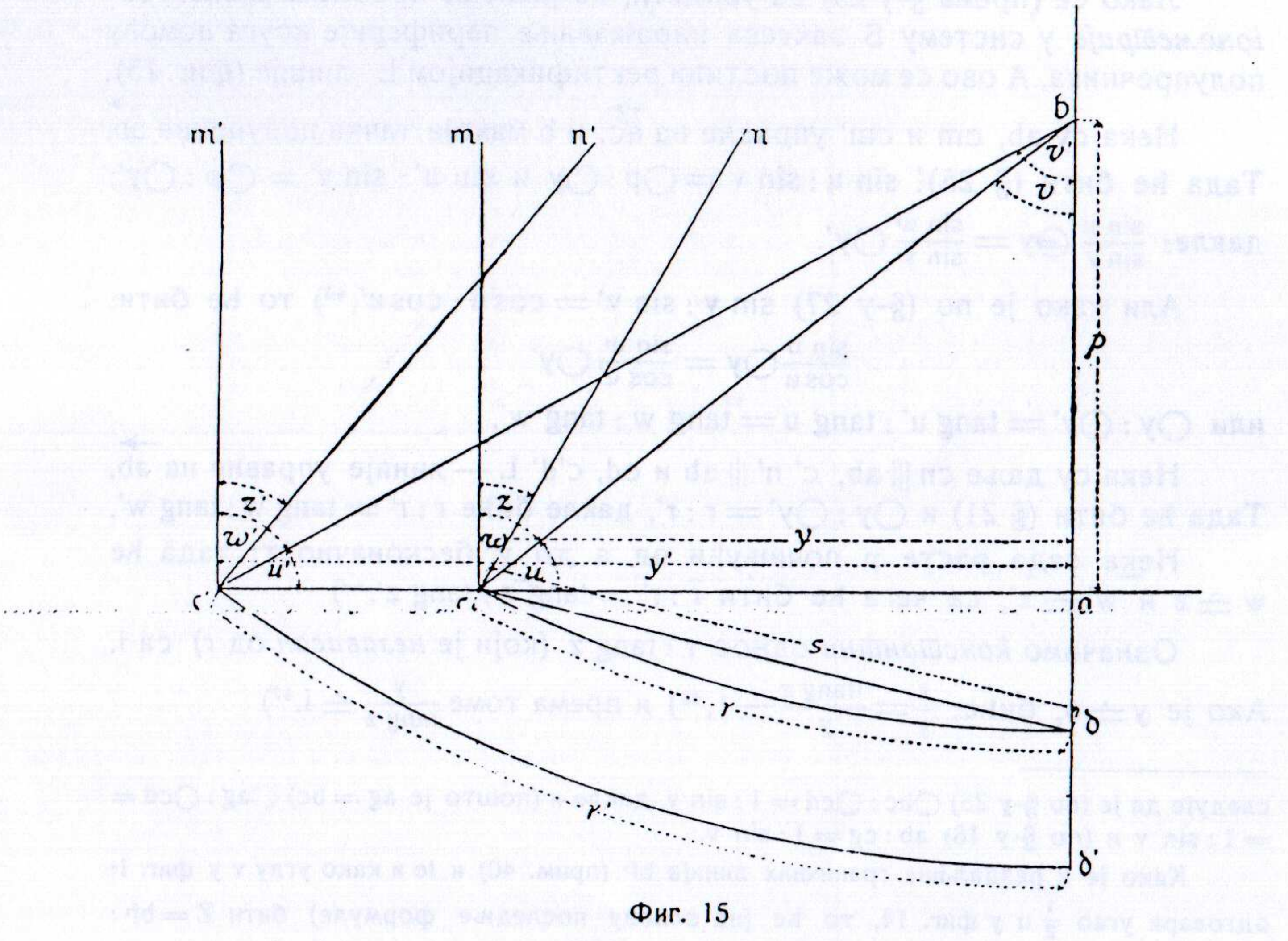
[45]) Кад p постане бесконачно очевидно да ће (упор. прим. 33) u прећи у угао паралелизма (за остојање y) и w у z (одн. w' у z').

[46]) Пошто је y половина тетиве лука граничне линије cd, то ће тетива и лук бивати све ближи по дужини што су краћи, тако да ће при прелазу ка граници пасти уједно. Стога ће за y = o бити $\lim \frac{r}{y} \left(= \lim \frac{i \operatorname{tang} z}{y}\right) = 1$.

[47]) Како је $\lim \frac{i \operatorname{tang} z}{y} = 1$ то је $\lim \frac{\operatorname{tang} z}{y} = \frac{1}{i}$ и $\lim \frac{y}{\operatorname{tang}} = i$.

Из §-а 29 следује: $\operatorname{tang} z = \frac{1}{2}(Y - Y^{-1})$.[48]

Према томе $\frac{2y}{Y - Y^{-1}} \doteq i$,[49] или $\frac{2y \cdot J^{\frac{y}{i}}}{J^{\frac{2y}{i}} - 1} \doteq i$.[50]



Фиг. 15

---

[48]) Пошто је $z = R - u$, то је $\operatorname{tang} z = \operatorname{cotg} u =$

$$= \frac{\operatorname{cotg}^2 \frac{u}{2} - 1}{2 \operatorname{cotg} \frac{u}{2}} = \frac{1}{2}\left(\operatorname{cotg} \frac{u}{2} - \frac{1}{\operatorname{cotg} \frac{u}{2}} \right) = \left(\text{пошто је } Y = \operatorname{cotg} \frac{\pi}{2}\right) = \frac{1}{2}(Y - Y{-1}).$$

[49]) Пошто је $\lim \frac{y}{\operatorname{tang} z} = i$ (прим. 47) и $\operatorname{tang} z = \frac{1}{2}(Y - Y^{-1})$, то је $\lim \frac{2y}{Y - Y{-1}} = i$.

[50]) Како је по §-у 24 $Y = J^{\frac{y}{i}}$ (за раздаљ. i два гранична лука), то је $\lim \frac{2y}{Y - Y_{-1}} =$

$$= \lim \frac{2y}{J^{\frac{y}{i}} - \frac{1}{J^{\frac{y}{i}}}} = \lim \frac{2y \cdot J^{\frac{y}{i}}}{J^{\frac{2y}{i}} - 1}, \text{ па према томе и } \lim \frac{2y \cdot J^{\frac{y}{i}}}{J^{\frac{2y}{i}} - 1} = i.$$

Познато је пак да је гранична вредност овог израза (за $y \doteq o$) $\frac{i}{\text{lognat } J}$;[51]) према томе је $\frac{i}{\text{lognat } J} = i$ и $J = e = 2,7182818\ldots$, познати број којисе и овде на тако необичан начин појављује. Ако дакле од сада i буде значило ону праву за коју је $J = e$, биће $r = i \operatorname{tang} z$. Како је пак (§ 21) $\bigcirc y = 2\pi r$, то ће бити: $\bigcirc y = 2\pi i \operatorname{tang} z = \pi i\,(Y - Y^{-1}) = \pi i \left(e^{\frac{y}{i}} - e^{-\frac{y}{i}}\right) =$
$= \frac{\pi y}{\text{log. nat. } Y}(Y - Y^{-1})$ по §-у 24.[52])

Напомена 1. У овоме параграфу доказује Бољај најпре став, да је однос између полупречника (r) круга на граничној површини, чијем гранично-линијском пречнику (2r) одговара извесна тетива (2y), и тангенте угла (z), који је комплеменат угла паралелизма за половину те тетиве (за y), једна константна количина независна од величине полупречника r (ту константну количину он означава са i, тако да је $i = \operatorname{tang} z$). Затим Бољај доказује став, да је однос (J) два гранична лука, чија је раздаљина i, $= e$, т. ј. бази Неперових логаритама. И напослетку изводи формулу за величину периферије круга $\bigcirc y = \pi i \left(e^{\frac{y}{i}} - e^{-\frac{y}{i}}\right)$.

---

[51]) Како израз $\dfrac{2y \cdot J^{\frac{y}{i}}}{J^{\frac{2y}{i}} - 1}$ за $y = o$ постаје $= \frac{o}{o}$, то се његова гранична вредност одређује диференцијалним рачуном на следећи начин. Применом формула $\lim \frac{f(x)}{\varphi(x)} = \lim \frac{f'(x)}{\varphi'(x)}$, $\frac{duv}{dx} = u\frac{dv}{dx} + v\frac{du}{dx}$ и $da^x = a^x \ln a\, dx$ биће: $\lim \dfrac{2y \cdot J^{\frac{y}{i}}}{J^{\frac{2y}{i}-1}} =$

$$= \lim \left[\frac{d\,2y\,J^{\frac{y}{i}}}{dy} : \frac{d\left(J^{\frac{2y}{i}-1}\right)}{dy}\right] = \lim \left[\left(2y \cdot \frac{J^{\frac{y}{i}} \ln J\, d\frac{y}{i}}{dy} + J^{\frac{y}{i}} \cdot \frac{d\,2y}{dy}\right) : \frac{J^{\frac{2y}{i}} \ln J\, d\frac{2y}{i}}{dy}\right] =$$

$= \lim \dfrac{2y\,J^{\frac{y}{i}} \cdot \frac{\ln J}{i} + J^{\frac{y}{i}} \cdot 2}{J^{\frac{2y}{i}} \cdot \frac{\ln J \,.\, 2}{i}}$. Како овај последњи израз за $y = 0$ постаје $= \frac{i}{\ln J}$, и како је с друге стране $\lim \dfrac{2y\,J^{\frac{y}{i}}}{J^{\frac{2y}{i}} - 1} = i$, то је $\frac{i}{\ln J} = i$, и према томе $\ln J = 1$, дакле $J = e$.

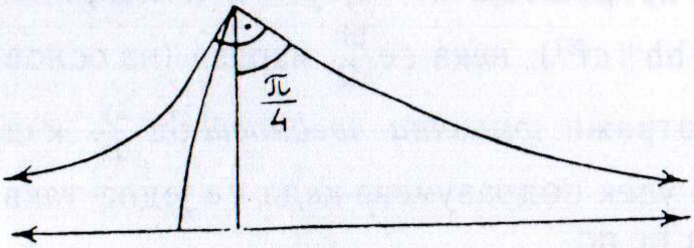
[52]) Како је (прим. 48) $\operatorname{tang} z = \operatorname{cotg} u = \dfrac{\operatorname{cotg}^2 \frac{u}{2} - 1}{2 \operatorname{cotg} \frac{u}{2}} = \dfrac{1}{2}\left(\operatorname{cotg}\frac{u}{2} - \dfrac{1}{\operatorname{cotg}\frac{u}{2}}\right) =$

$= \frac{1}{2}(Y - Y^{-1})$, то је $2\pi i \operatorname{tang} z = \pi i\,(Y - Y^{-1})$.

Како је (по §-у 24) $Y = J^{\frac{y}{i}} = e^{\frac{y}{i}}$, то је $\pi i\,(Y - Y^{-1}) = \pi i \left(e^{\frac{y}{i}} - e^{-\frac{y}{i}}\right)$.

И напослетку, како из $Y = J^{\frac{y}{i}} = e^{\frac{y}{i}}$ следује да је $\ln Y = \frac{y}{i}$ и $i = \frac{y}{\ln Y}$, то је $\pi i \left(e^{\frac{y}{i}} - e^{-\frac{y}{i}}\right) = \frac{\pi y}{\ln Y}(Y - Y^{-1})$.

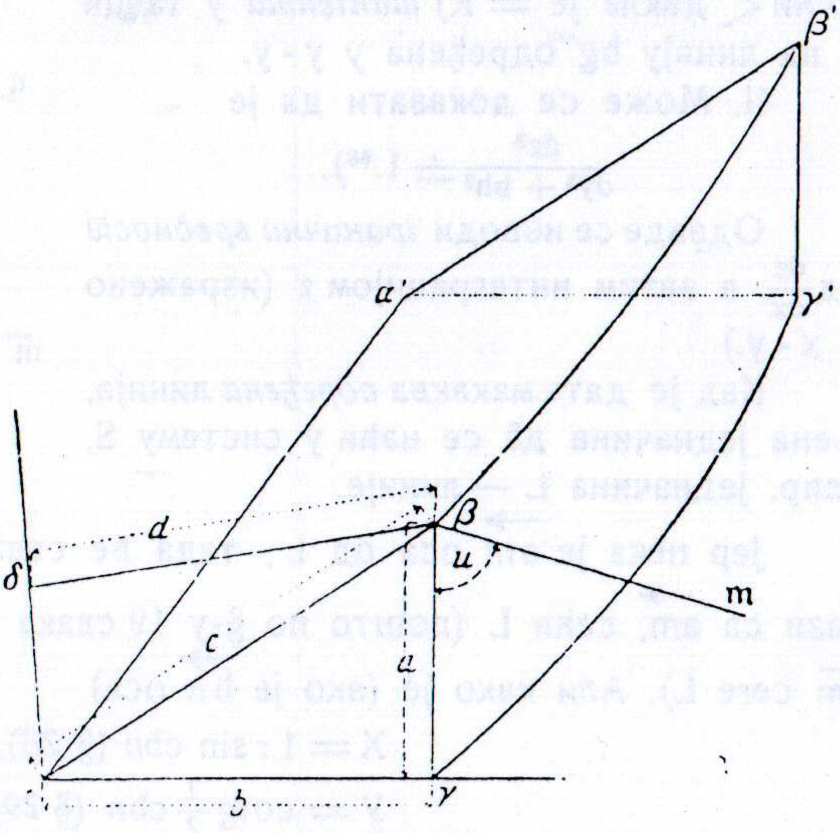
Напомена 2. Из формуле $i = \frac{r}{\operatorname{tang} z}$ следује за $z = \frac{\pi}{4}$ ($= 45^0$) да је $i = r$. Према томе лук граничне линије, код којег је тангента на оси у једној крајној тачци његовој паралелна продуженој оси у другој крајној тачци (в. сл. 2'), раван је по својој дужини константној количини i. (Упор. напр. *H. Liebmann*, Nichteuklidische Geometrie, 3-te Aufl. 1923, § 18, s. 67). Како се i да конструисати, о томе види § 38.



Сл. 2'

§ 31.

За тригонометријско решавање свих правоуглих праволинијских троуглова (чиме је омогућено решавање свих троуглова) у систему S довољне су три једначине, наиме (означивши са a, b катете, са c хипотенузу, а са α и β углове наспрам катета) једна једначина која изражава однос *прво* између a, c, α, *друго* између a, α, β и *треће* између a, b, c. Из ове *остале* три следују елиминацијом[53]) (фиг. 16).



Фиг. 16

I. Из §§-а 25 и 30 следује:
$1 : \sin\alpha = (C - C^{-1}) : (A - A^{-1}) = \left(e^{\frac{c}{i}} - e^{-\frac{c}{i}}\right) : \left(e^{\frac{a}{i}} - e^{-\frac{a}{i}}\right)$, (једначина за a, c, α).[54])

---

[53]) У немачкој обради Апендикса (н. н. м. s. 199) Бољај је на овом месту опширнији: „Из ових једначина произилазе наиме још три, које су, као што је познато, потребне зарад потпуног разрешења троуглова".

[54]) Из троугла αβγ следује (по §-у 25) да је $1 : \sin\alpha = \bigcirc c : \bigcirc a$, а како је $\bigcirc c = \pi i (C - C^{-1})$ и $\bigcirc a = \pi i (A - A^{-1})$, то је $1 : \sin\alpha = (C - C^{-1}) : (A - A^{-1}) = \left(e^{\frac{c}{i}} - e^{-\frac{c}{i}}\right) : \left(e^{\frac{a}{i}} - e^{-\frac{a}{i}}\right)$.

II. Из §-а 27 следује (ако је $\beta m \parallel\!| \gamma n$)

$$\cos\alpha : \sin\beta = 1 : \sin u^{55)};$$

како је пак по §-29-ом

$$1 : \sin u = \frac{1}{2}\,(A + A^{-1})^{56)},$$

то је $\cos\alpha : \sin\beta = \frac{1}{2}\,(A + A^{-1}) = \frac{1}{2}\left(e^{\frac{a}{i}} + e^{-\frac{a}{i}}\right)$, (једначина за α, β, a) [57]

III. Ако је $\alpha\alpha' \perp \beta\alpha\gamma$, и ако су $\beta\beta'$ и $\gamma\gamma' \parallel \alpha\alpha'$ [58]), (§ 27), и ако је $\beta\alpha'\gamma' \perp \alpha\alpha'$ биће очевидно (као и у §-у 27)

$$\frac{\beta\beta'}{\gamma\gamma'} = \frac{1}{\sin u} = \frac{1}{2}\,(A + A^{-1}),^{59)}$$

$$\frac{\gamma\gamma'}{\alpha\alpha'} = \frac{1}{2}\,(B + B^{-1}),$$

и

$$\frac{\beta\beta'}{\alpha\alpha'} = \frac{1}{2}\,(C + C^{-1}).$$

Према томе је:

$$\frac{1}{2}\,(C + C^{-1}) = \frac{1}{2}\,(A + A^{-1})\,\frac{1}{2}\,(B + B^{-1}),^{60)}$$

Ако се уведу хиперболне функције, чија аналитичка дефиниција гласи: $\sinh u = \frac{e^{u} - e^{-u}}{2}$, $\cosh u = \frac{e^{u} + e^{-u}}{2}$, $\operatorname{tgh} u = \frac{e^{u} - e^{-u}}{e^{u} + e^{-u}}$, $\operatorname{cotgh} u = \frac{e^{u} + e^{-u}}{e^{u} - e^{-u}}$, $\operatorname{sech} u = \frac{2}{e^{u} + e^{-u}}$, $\operatorname{cosech} u = \frac{2}{e^{u} - e^{-u}}$, претвориће се $1 : \sin\alpha = \left(e^{\frac{c}{i}} - e^{-\frac{c}{i}}\right) : \left(e^{\frac{a}{i}} - e^{-\frac{a}{i}}\right)$ у образац $\sin\alpha \cdot \sinh\frac{c}{i} = \sinh\frac{a}{i}$ (прва једначина).

Увођењем хиперболних функција Бољајеве трипонометријске формулн за правоугли праволинијски троугао постају простије и прегледније.

55) Кад се фиг. 16 упореди са фиг. 12 види се да је (пошто α фиг. 16-е одговара углу R — u фигуре 12 а угао β углу v) доиста $\cos\alpha : \sin\beta = 1 : \sin u$.

56) Како је у фиг. 16 $\operatorname{cotg}\frac{u}{2} = A = e^{\frac{a}{i}}$ и како је $\sin u = \frac{2\operatorname{cotg}\frac{u}{2}}{\operatorname{cotg}^2\frac{u}{2} + 1}$, то је $\sin u = \frac{2}{e^{\frac{a}{i}} + e^{-\frac{a}{i}}}$ и $1 : \sin u = \frac{1}{2}\,(A + A^{-1})$.

57) На основу аналитичке дефиниције хипероболног косинуса (прим. 54) лако се да увидети, да је $\cos\alpha : \sin\beta = \cosh\frac{a}{i}$, дакле да је $\cos\alpha = \sin\beta\,\cosh\frac{a}{i}$, (друга једначина).

58) Што ће рећи, ако су $\beta\beta'$ и $\gamma\gamma'$ линије једнаког одстојања у односу на праву $\alpha\alpha'$.

59) Да је $\frac{\beta\beta'}{\gamma\gamma'} = \frac{1}{\sin u}$ морало би нарочито да се докаже.

60) Пошто је $\frac{\beta\beta'}{\alpha\alpha'} = \frac{\beta\beta'}{\gamma\gamma'} \cdot \frac{\gamma\gamma'}{\alpha\alpha'}$.

или $e^{\frac{c}{i}} + e^{-\frac{c}{i}} = \frac{1}{2}\left(e^{\frac{a}{i}} + e^{-\frac{a}{i}}\right)\left(e^{\frac{b}{i}} + e^{-\frac{b}{i}}\right)$ (једначина за a, b, c).[61])

Ако је $\gamma\alpha\delta = R$ и $\beta\delta = \alpha\delta$, биће $\bigcirc c : \bigcirc a = 1 : \sin\alpha$ и $\bigcirc c : \bigcirc(d = \beta\delta) = 1 : \cos\alpha$, дакле и (означавајући са $\bigcirc x^2$, за макоју вредност од x, продукт $\bigcirc x \cdot \bigcirc x$) $\bigcirc a^2 + \bigcirc d^2 = \bigcirc c^2$.[62])

Али како је (по §-у 27 и II)

$$\bigcirc d = \bigcirc b \cdot \frac{1}{2}(A + A^{-1})\ ^{63)},$$

то је

$$\left(e^{\frac{c}{i}} - e^{-\frac{c}{i}}\right)^2 = \frac{1}{4}\left(e^{\frac{a}{i}} + e^{-\frac{a}{i}}\right)^2\left(e^{\frac{b}{i}} - e^{-\frac{b}{i}}\right)^2 + \left(e^{\frac{a}{i}} - e^{-\frac{a}{i}}\right)^2,$$

а ово је друга једначина за a, b, c[64]) (чији се други члан може лако довести на један *симетричан* и *инвариабилан* облик).

Напослетку из

$$\frac{\cos\alpha}{\sin\beta} = \frac{1}{2}\left(A + A^{-1}\right)\ ^{65)}$$

и

$$\frac{\cos\beta}{\sin\alpha} = \frac{1}{2}\left(B + B^{-1}\right) \text{ следује (према III)}$$

$$\operatorname{cotg}\alpha \operatorname{cotg}\beta = \frac{1}{2}\left(e^{\frac{c}{i}} + e^{-\frac{c}{i}}\right) \text{ (једначина за } \alpha, \beta, c).^{66)}$$

Напомена. Са §-ом 31 завршава се излагање неевклидске Тригонометрије, које је отпочело у §-у 25-ом.

§ 32.

Још нам остаје да покажемо начин решавања *проблема* у систему S, а затим (пошто је то показано на лакшим примерима) рећи ћемо и шта је све ова теорија у стању да учини.

---

[61]) Увођењем хаперболног косинуса ова једначина добија облик $\cosh\frac{c}{i} = \cosh\frac{a}{i}\cdot\cosh\frac{b}{i}$ (трећа једначина).

[62]) Како је $\bigcirc a^2 = \bigcirc c^2 \sin^2\alpha$ и $\bigcirc d^2 = \bigcirc c^2\cos^2\alpha$, то је $\bigcirc a^2 + \bigcirc d^2 = \bigcirc c^2$.

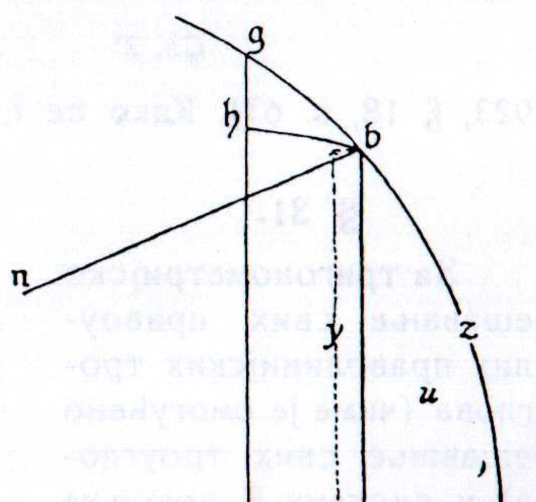
[63]) На основу одељка II у овом §-у имамо да је $\cos\alpha : \sin\beta = \frac{1}{2}(A + A^{-1})$; пошто је пак $\bigcirc d : \bigcirc b = \cos\alpha : \sin\beta$, то је $\bigcirc d = \bigcirc b \cdot \frac{1}{2}(A + A^{-1})$.

[64]) Увођењем хиперболних функција ова једначина добија облик $\sinh^2\frac{c}{i} = \cosh^2\frac{a}{i}\ \sinh^2\frac{b}{i} + \sinh^2\frac{a}{i}$.

[65]) Упор. примедбе 55 и 56.

[66]) Увођењем хиперболног косинуса ова једначина добија облик $\operatorname{cotg}\alpha\ \operatorname{cotg}\beta = \cosh\frac{c}{i}$.

I. Нека је (фиг. 17) ab линија у равни и $y = f(x)$ њена једначина (у правоуглим координатама), нека је dz макакав прираштај $z - a$, и нека dx, dy, du означавају одговарајуће прираштаје $x - a$, $y - a$ и површине u која одговара z - y. Нека је даље $bh \parallel cf$[67]), нека се $\frac{bh}{dx}$ изрази (на основу §§-а 31 и 27) у y-у и нека се потражи *гранична вредност* од $\frac{dy}{dx}$ кад dx тежи ка нули (што се уосталом увек подразумева када се једна таква гранична вредност одређује). Тада ће постати позната и гранична вредност од $\frac{dy}{bh}$, као и тангента угла hbg; тако исто биће (пошто угао hbc очевидно није ни $>$ ни $<$ дакле је $= R$) *тангента* у тачци b на линију bg одређена у y-у.



Фиг. 17

II. Може се доказати да је

$$\frac{dz^2}{dy^2 + bh^2} \doteq 1.^{68)}$$

Одавде се изводи *гранична вредност* од $\frac{dz}{dx}$, а затим интеграцијом z (изражено у x-у.)

Кад је дата макаква *одређена* линија, њена једначина да̂ се наћи у систему S, напр. једначина L — линије.

Јер нека је $\overrightarrow{am}$ оса од L; тада ће свака полуправа $\overrightarrow{cb}$, која полази са $\overrightarrow{am}$, сећи L (пошто по §-у 19 свака права повучена из a поред $\overline{am}$ сече L). Али како је (ако је $\overrightarrow{bn}$ оса)

$$X = 1 : \sin cbn \ (\S\ 28),$$

и

$$Y = \operatorname{cotg} \frac{1}{2} cbn \ (\S\ 29),$$

то је

$$Y = X + \sqrt{X^2 - 1}^{\,69)}$$

или

$$e^{\frac{y}{i}} = e^{\frac{x}{i}} + \sqrt{e^{\frac{2x}{i}} - 1}$$

---

[67]) Т. ј. нека је bh линија једнаког остојања у односу на праву cf.

[68]) Друкчије написана ова формула добија облик: $dz^2 = dy^2 + bh^2$ и значи да за правоугли троугао неевклидске равни, чије су стране бескрајно мале, важи Питагорин образац Евклидове геометрије.

[69]) На основу формуле $\sin \alpha = \frac{2 \operatorname{cotg} \frac{\alpha}{2}}{\operatorname{cotg}^2 \frac{\alpha}{2} + 1}$ следује, из $X = 1 : \sin cbn$ и $Y = \operatorname{cotg} \frac{1}{2} cbn$, да је $X = 1 : \frac{2 \operatorname{cotg} \frac{1}{2} cbn}{\operatorname{cotg}^2 \frac{1}{2} cbn + 1} = 1 : \frac{2Y}{Y^2+1} = \frac{Y^2+1}{2Y}$. А решењем квадратне једначине $X \cdot 2Y = Y^2 + 1$, следује $Y = X + \sqrt{X^2 - 1}$.

тражена једначина.[70]) Одавде следује

$$\frac{dy}{dx} \doteq X \cdot (X^2 - 1)^{-\frac{1}{2}}$$

и $$\frac{bh}{dx} \doteq 1 : \sin cbn = X;$$

према томе и $$\frac{dy}{bh} \doteq (X^2 - 1)^{-\frac{1}{2}},$$

$$1 + \frac{dy^2}{bh^2} \doteq X^8 (X^2 - 1)^{-1},$$

$$\frac{dz^2}{bh^2} \doteq X^2 (X^2 - 1)^{-1},$$

$$\frac{dz}{bh} \doteq X (X^2 - 1)^{-\frac{1}{2}},$$

и $$\frac{dz}{dx} \doteq X^2 (X^2 - 1)^{-\frac{1}{2}},$$

одакле се интеграцијом налази (као у §-у 30)

$$z = i (X^2 - 1)^{\frac{1}{2}} = i \operatorname{cotg} cbn.$$ [71])

III. Очевидно да је

$$\frac{du}{dx} \doteq \frac{hfcbh}{dx},$$

који израз (ако није зависан од y-a) има најпре да се изрази у y-y; па затим да се изведе и интеграцијом.

Ако је (фиг. 12) $ab = p$, $ac = q$, $cd = r$ и $cabdc = s$, моћи ће се (као под II.) показати да је $\frac{ds}{dq} \doteq r$,

које је $$= \frac{1}{2} p \left(e^{\frac{q}{i}} + e^{-\frac{q}{i}}\right),$$ [72])

одакле интеграцијом следује $s = \frac{1}{2} pi \left(e^{\frac{q}{i}} - e^{-\frac{q}{i}}\right)$.[73])

---

[70]) Ако се у формули $X = \frac{Y^2 + 1}{2Y}$ (упор. пређашњу прим.) стави $X = e^{\frac{x}{i}}$ и $Y = e^{\frac{y}{i}}$, биће $e^{\frac{x}{i}} = \frac{1}{2}\left(e^{\frac{y}{i}} + e^{-\frac{y}{i}}\right)$ или (увођењем хиперболног косинуса) $e^{\frac{x}{i}} = \cosh \frac{y}{i}$, што је краћи израз за једначину граничне линије.

[71]) Ово је формула за дужину лука граничне линије. Увођењем хиперболног синуса формула добија облик: $z = i \sinh \frac{y}{i}$.

[72]) Ово је формула за дужину лука линије једнаког одстојања. Увођењем хиперболног косинуса формула добија облак: $r = p \cosh \frac{q}{i}$.

[73]) Ово је формула за површину четворостране фигуре, чија је једна страна лук линије једнаког остојања. Увођењем хиперболног синуса формула добија облик: $s = ip \sinh \frac{q}{i}$.

До овог се резултата може доћи и без интеграљења.

Ако су (на показани начин) дате напр. једначина круга (по §-у 31 III), праве линије (по §-у 31. II), једног конусног пресека, моћи ће се одредити и површине ограничене овим линијама.

Лако се дâ увидети, да ће се (крива) површина t, која је (на остојању q) ∥ са једном равном фигуром p, односити према овој фигури као друге потенције хомологих линија или као

$$\frac{1}{4}\left(e^{\frac{q}{i}}+e^{-\frac{q}{i}}\right)^2 : 1.\text{[74]}$$

Даље лако се да увидети да ће израчунавање запремине, извођено на исти начин, захтевати две интеграције (као што се и сам диференцијал овде може да одреди само интеграљењем). И да се пре свега има да одреди запремина тела ограниченог површинама p и t и скупом свих управних на p, које спајају обиме од p и t.[75]) Запремину његову налазимо (како интеграљењем тако и без интеграљења) да је

$$=\frac{1}{8}\, pi\left(e^{\frac{2q}{i}}-e^{-\frac{2q}{i}}\right)+\frac{1}{2}\, pq.\text{[76]}$$

Тако исто дају се у систему S одредити и површине тела, као и *кривине*, *еволуте* и *еволвенте* макаквих линија и т. д. Што се тиче кривине, она је у систему S или кривина саме L — линије, или се да одредити полупречником круга, или остојањем једне праве од криве која је ∥ с овом правом. Као што се лако на основу раније реченог дâ показати, осим L — линије, кружних линија и кривих које су ∥ са правом, нема у систему S никаквих других униформних линија.[77])

IV. За круг следује (као под III)

$$\frac{d\odot x}{dx} \doteq \bigcirc x,$$

одакле се (по §-у 30) интеграљењем добија

$$\odot x = \pi i^2\left(e^{\frac{x}{i}}-2+e^{-\frac{x}{i}}\right).\text{[78]}$$

[74]) Ако се стране правоугаоника у равни означе са a и b, а одговарајуће стране правоугаоника на површини једнаког остојања (која за q одстоји од равни) са a_1 и b_1, биће (према формули у прим. 72): $a_1 = a \cosh\frac{q}{i}$ и $b_1 = b \cosh\frac{q}{i}$, дакле $a_1\, b_1 = a\, b \cosh^2\frac{q}{i}$. Према трме биће $a_1\, b_1 : ab = \cosh^2\frac{q}{i} : 1$, што је идентично са горњим изразом.

[75]) Ово тело аналого је правој призми у Евклидовом простору, чија је основа p а висина h. Његова је горња површина крива површина једнаког остојања у односу на равну основу p, а остојање обе ове површине = q.

[76]) Увођењем хиперболног синуса ова једначина добија облик: $\frac{1}{4}\, pi \sinh\frac{2q}{i}+\frac{1}{2}\, pq$.

[77]) Упореди напомену уз § 17.

[78]) Увођењем хиперболног синуса формула за површину круга добија облик: $\odot x = 4\pi i^2 \sinh^2\frac{x}{2i}$.

V. За површину cabdc $=$ u (ограничену L-линијом ab $=$ r, овој ||-ој cd $=$ y и правим линијама ac, bd $=$ x) биће (фиг. 9) $\frac{du}{dx} \doteq y$ и (§ 24) $y = re^{-\frac{x}{i}}$, одакле интегралењем следује

$$u = ri\left(1 - e^{-\frac{x}{i}}\right).$$

Ако x постане бесконачно биће у S — систему $e^{-\frac{x}{i}} \doteq 0$ и $u \doteq ri$. У следећем подразумеваћемо под овом граничном вредношћу величину фигуре mabn.

На сличан начин наћи ћемо, ако је p једна фигура на површини F, да је простор ограничен од p и скупа оса повучених из тачака које се налазе на обиму фигуре p, раван $\frac{1}{2}$pi.

VI. Нека је 2u угао у средишту лоптине калоте z, нека је p периферија највећег круга, и лук fs (угла u) $=$ x (фиг. 10); тада ће бити (§ 25)

$$1 : \sin u = p : \bigcirc bc,$$

а одатле $\bigcirc bc = p \sin u$.

Међутим је $x = \frac{pu}{2\pi}$ и $dx = \frac{pdu}{2\pi}$.

Даље је $\frac{dz}{dx} \doteq \bigcirc bc$, дакле $\frac{dz}{du} \doteq \frac{p^2}{2\pi} \sin u$, одакле (интеграцијом) следује да је:

$$z = \frac{\text{sinvers}\, u}{2\pi} p^2 \text{ [79]}$$

Замислимо површину F у којој се налази периферија p (која пролази кроз средиште f лоптине калоте); замислимо кроз af и ac равни $\overline{fem}$, $\overline{cem}$ које ће бити управне на F и сећи је по feg и ce; и посмотримо L — линију cd (која је у c управна на feg) и L — линију cf. Тада ће бити (§ 20) cef $=$ u и (§ 21) $\frac{fd}{p} = \frac{\text{sinvers}\, u}{2\pi}$, према томе z $=$ fd. p. Али како је (§ 21) $p = \pi.$ fdg, то је $z = \pi.$ fd. fdg, Како је даље (§ 21) fd. fdg $=$ fc. fc, то је $z = \pi$ fc. fc $= \odot$fc у F.

Нека је сада (фиг. 14) bj $=$ cj $=$ r, па ће бити (§ 30)

$$2r = i\,(Y - Y^{-1}),$$

према томе (§ 21)

$$\odot\, 2\,r\ (y\,F) = \pi\, i^2\ (Y - Y^{-1})^2.$$

Тако исто је (IV)

$$\odot\, 2\,y = \pi\, i^2\,(Y^2 - 2 + Y^{-2}),$$

дакле је $\odot\, 2\,r\,(y\,F) = \odot\, 2\,y$,[80]) па према томе је *површина лоптине калоте z равна површини круга чији је полупречник тетива f c.*

---

[79]) Sinvers значи arcsin.

[80]) Што ће рећи да кругови, чије периферије у површини F и равни падају уједно (в. напомену уз § 18), имају једнаке површине.

Одавде следује да је површина целе лопте $= \odot fg = fdg \cdot p = \frac{p^2}{\pi}$, да се дакле *површине лопти односе као квадрати периферија њихових највећих кругова.*

VII. На сличан начин налази се, да је запремина кугле у систему S

$$= \frac{1}{2}\pi i^3 (X^2 - X^{-2}) - 2\pi i^2 x,^{81)}$$

да је површина која постаје обртањем линије cd око ab (фиг. 12)

$$= \frac{1}{2}\pi i p \ (Q^2 - Q^{-2}),$$

и тело описано од c a b d c

$$= \frac{1}{4}\pi i^2 p \ (Q - Q^{-1})^2.$$

Како се пак сви они резултати који су почев од IV досада добивени могу извести и без интегралења, то се овде зарад краткоће изостављa.

Може се доказати, да је гранична вредност сваког израза који садржи писме i (и који је према томе заснован на хипотези да постји i), када i постане бесконачно, један израз који изражава вредност у систему Σ (т. ј. у хипотези да не постоји i), осим ако једначине не постају идентичне. Али не сме се помислити, да се сам систем може да мења (јер је он по себи и у себи одређен), већ само хипотеза, која се сукцесивно све дотле може мењати докле се не дође до каквог апсурдума. Претпостављајући дакле да у таквоме изразу писме i, у случају да постоји систем S, означава ону јединствену количину за коју је $J = e$, у случају да Σ постоји узеће се речена гранична вредност место датог израза. И очевидно је, да сви изрази који произилазе из хипотезе да систем S стварно постоји (у овом смислу) важе апсолутно, па и онда када је сасвим непознато дали постоји систем Σ или тај систем не постоји.

Тако напр. из израза добивеног у § 30 лако се (како помоћу диференцијалења тако и без њега) налази позната вредност у систему Σ, наиме $\bigcirc x = 2\pi x$; из I (§ 31), пошто се изведу потребне трансформације, следује једначина

$$1 : \sin\,\alpha = c : a;$$

из II пак $\frac{\cos\alpha}{\cos\beta} = 1$ и, према томе, $\alpha + \beta = R$;

прва једначина у III постаје идентична, па према томе важи и у систему Σ иако у њему ништа не одређује; из *друге* пак следује да је $c^2 = a^2 + b^2$.

Све су ово познате основне једначине равне тригонометрије у систему Σ.

---

[81]) Увођењем хиперболног синуса ова формула добија облик: $\pi i^2 \sinh\frac{2x}{i} - 2\pi i^2 x$.

Даље се налази (из §-а 32) за површину и запремину у III да су обе $=pq$; из IV следује да је $\odot x = \pi x^2$; из VIII за сферу полупречника x да је $= \frac{4}{3}\pi x^3$.

Теореме које се налазе на крају одељка VI такође су *безусловно истините*.

§ 33

Остаје нам још да изложимо, шта управо наша теорија хоће и значи (као што је обећано у § 32).

I. Дали постоји систем Σ или неки од система S, остаје неодлучено.

II. Све што следује из *лажности* XI-е аксиоме (увек *у смислу* §-а 32) *апсолутно* важи, и *у овом смислу не оснива се ни на каквој хипотези*. Постоји дакле једна *равна тригонометрија apriori*, у којој *једино* остаје *непознат* систем који *стварно* постоји и остају непознате само *апсолутне* величине у изразима, док би очевидно, кад би била та величана позната у једном *једином* случају, цео систем тиме био фиксиран. Сферна тригонометрија пак апсолутно је заснована у §-у 26 (На површини F важи геометрија која је потпуно аналога равној геометрији у систему Σ).

III. Ако би било *утврђено* да Σ постоји, ништа у овом погледу неби остало непознато; ако би пак било *утврђено да Σ не постоји*, тада би (§ 31). ако би (напр.) стране x, y и праволинијски од њих захваћени угао били у *једном специјалном случају дати*, очевидно било немогуће да се троугао апсолутно реши, т. ј. да се априори одреде остали углови и однос треће стране спрам двеју датих, сем ако би односи X, Y били нађени. Ово последње било би пак могуће само ако би била *конкретно дата* дужина a за коју је одговарајуће A познато. Тада би і било *природна јединица дужине* (као што је e база природних логаритама). А како се, при претпоставци да је і познато, ова дужина може конструисати са бар за праксу највећом могућом приближношћу, биће доцније показано.[82])

IV. Јасно је да се, у смислу под I и II изложеном, може све у простору решити аналитичком методом модерних (која, употребљена у оправданим границама, заслужује високу похвалу).

V. Напослетку наклоњеним читаоцима неће бити неугодно да виде да се, у случају да не постоји Σ већ S, може конструисати праволинијска фигура која је равна кругу.[83])

Напомена. У одељцима I, II и III овај је параграф допуна другом одсеку претходног параграфа, чији је први одсек (у одељцима од I — VII) излагао формуле за површину и запремину у неевквидској геометрији у вези са одговарајућим једначинама линија.

---

[82]) Упор. § 38.

[83]) Друкчије речено, квадратура круга постаје у неевклидској равни могућа. Упор. § 43 и напомену 1 уз тај параграф.

§ 34

Из тачке d повлачи се dm ||| an на следећи начин (фиг. 12).

Из d нека се спусти db ⊥ an; нека се из макоје тачке праве $\overline{ab}$ подигне ac ⊥ an (у dba), и спусти de ⊥ ac. Тада ће бити (§ 2)

○ ed : ○ ab = 1 : sin z, ако се претпостави да је dm ||| bn.

Али sin z није > 1, и ab није > de.[84]) Према томе квадрант описан из средишта a у bac полупречником који је = de, имаће са bd или заједничку тачку b или тачку o. У првом случају биће очевидно z = R[85]) У другом случају пак биће (§ 25)

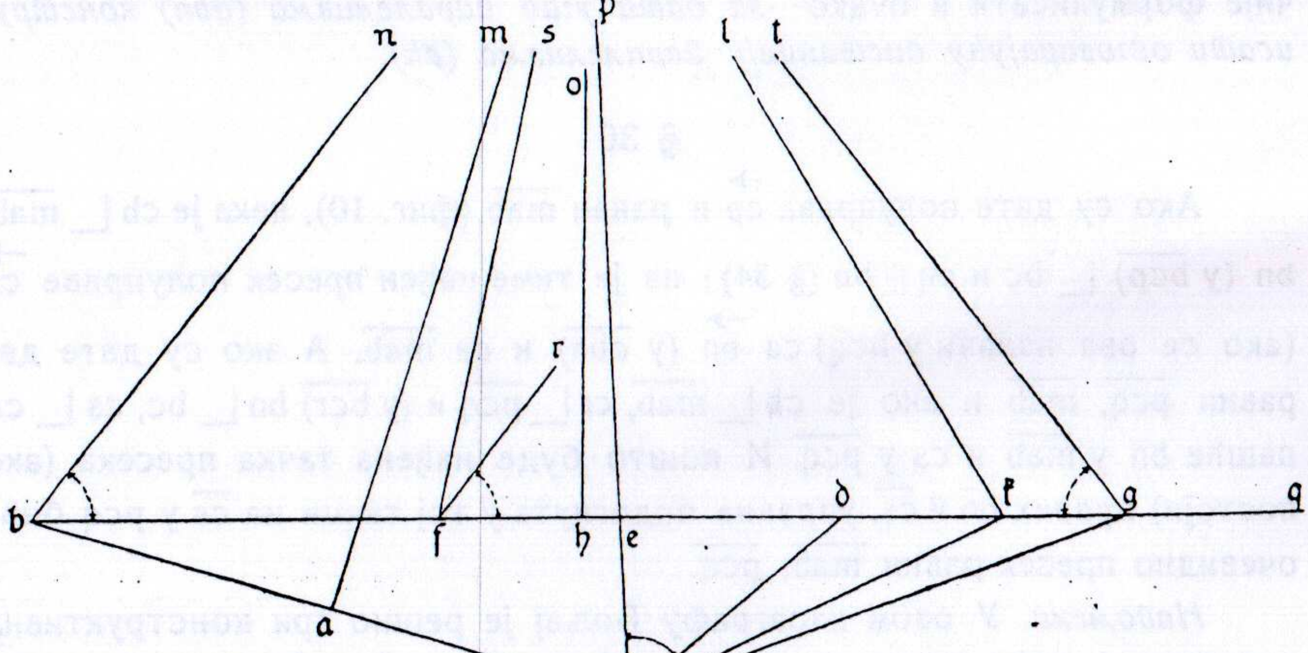
○ ao (= ○ ed) : ○ab = 1 sin aob и z = aob.

Ако се дакле направи z = aob, биће dm ||| bn.

Напомена. У овом параграфу решио је Бољај конструктивни задатак, да се из дате тачке (d) повуче паралелна (dm) датој правој (bn). Задатак се може и овако формулисати: *за дату дистанцију паралелизма (db) конструисати одговарајући угао паралелизма (z).*

§ 35

Ако је дато S, *на следећи начин да се повући права која је управна на једном краку оштрог угла а паралелна са другим краком* (фиг. 18),



Фиг. 18

Нека је am ⊥ bc, и нека се узме ab = ac тако мало (по §-у 19) да, кад се повуче bn ||| am (§ 34), буде abn > од датог угла. Нека се даље повуче cp ||| am (§ 34) и нека су како nbq тако и pcd једнаки са датим углом. Тада ће

84) Како је 1 : sin z ≧ 1, то је ○ ed : ○ ab ≧ 1, дакле ab ≦ ed.

85) Ово је Евклидов случај.

се $\overrightarrow{bq}$ и $\overrightarrow{cd}$ узајмно сећи. Јер нека $\overrightarrow{bq}$ (која *по конструкцији* пада у nbc) сече $\overrightarrow{cp}$ у тачци е: тада ће бити (због тога што је $bn \simeq cp$) $ebc < ecb$, и $ec < eb$. Нека су $ef = ec$, $efr = ecd$, и $fs \parallel\!| ep$; тада ће fs падати у bfr. Јер пошто је $bn \parallel\!| cp$, биће $bn \parallel\!| ep$ и $bn \parallel\!| fs$ и даље ће бити (§ 14) $fbn + bfs < 2R = fbn + bfr$, дакле $bfs < bfr$. Стога ће $\overrightarrow{fr}$ сећи $\overrightarrow{ep}$, дакле и $\overrightarrow{cd}$ сећи $\overrightarrow{eq}$ у једној извесној тачци d.[86]

Нека је сада $dg = dc$ и $dgt = dcp = gbn$; тада ће бити (пошто је $cd \simeq gd$)

$$bn \simeq gt \simeq cp.$$

Ако је k тачка L — линије осе bn, која пада на $\overrightarrow{bq}$ (§ 19), и kl оса, тада ће бити $bn \simeq kl$ и $bkl = bgt = dcp$, али и $kl \simeq cp$. Према томе ће очевидно тачка k пасти уједно са тачком g и бити $gt \parallel\!| bn$.[87]) Ако се пак у средини праве bg подигне управна ho, биће конструисана $ho \parallel\!| bn$.

Напомена. У овом параграфу Бољај је решио конструктивни задатак, да на једном краку (bq) датог оштрог угла (qbn) подигне управну (ho), која ће бити паралелна са другим краком (bn). Задатак се да друкчије формулисати и овако: *за дати угао паралелизма (qbn) конструисати одговарајућу дистанцију паралелизма (bh).*

§ 36

Ако су дате полуправа $\overrightarrow{cp}$ и раван $\overline{mab}$ (фиг. 10), нека је $cb \perp \overline{mab}$, bn (у $\overline{bcp}$) $\perp$ bc и $cq \parallel\!| bn$ (§ 34); па је тиме нађен пресек полуправе $\overrightarrow{cp}$ (ако се ова налази у bcq) са $\overrightarrow{bn}$ (у $\overline{cbn}$) и са $\overline{mab}$. А ако су дате две равни $\overline{pcq}$, $\overline{mab}$ и ако је $cb \perp \overline{mab}$, $cr \perp \overline{pcq}$ и (у $\overline{bcr}$) $bn \perp bc$, $cs \perp cr$, пашће bn у $\overline{mab}$ и cs у $\overline{pcq}$. И пошто буде нађена тачка пресека (ако постоји) правих $\overline{bn}$ и $\overline{cs}$. управна подигнута у тој тачци на $\overline{cs}$ у pcq биће очевидно пресек равни $\overline{mab}$, $\overline{pcq}$.

Напомена. У овом параграфу Бољај је решио три конструктивна задатка: 1. наћи тачку пресека двеју правих; 2. наћи тачку пресека једне праве са једном равни и 3. наћи пресек двеју равни.

---

[86]) Пошто је наиме $\sphericalangle rfe = \sphericalangle ecd$, то се cd налази у истом положају у односу на полуправу $\overrightarrow{eq}$ у ком се fr налази у односу на $\overrightarrow{ep}$.

[87]) Како је cp (које је $\parallel$ bn) оса граничне линије која пролази кроз тачке b и k, то је $\sphericalangle pck = \sphericalangle lkc$, т. ј. $kl \simeq cp$. Како је пак и $gt \simeq cp$, то ће kl (које је $\parallel$ bn) пасти уједно са gt и бити $gt \parallel bn$ (пошто и k и g морају лежати на граничној линији која пролази кроз b и c).

§ 37

На $\overline{am} \parallel\!| bn$ налази се тачка a која чини да будэ $am \simeq bn$ (фиг. 7), ако се (по §-у 34) ван $\overline{nbm}$ конструише $gt \parallel\!| bn$ и направи $bg \perp gt$, $gc = gb$ и $cp \parallel\!| gt$, затим полураван tgd тако постави да са tgb заклапа исти угао који заклапа $\overrightarrow{pca}$ са $\overrightarrow{pcb}$ и (по §-у 36) потражи пресек $\overrightarrow{dq}$ полуравни $\overrightarrow{tgd}$, $\overrightarrow{nba}$, као и учини да буде $ba \perp dq$. Јер очевидно да ће, услед сличности L — линијских троуглова на површини F осе bn, бити $db = da$ и $am \simeq bn$.[88]

Из овога лако се увиђа (пошто су L — линије одређене својим *крајним тачкама*), да се могу наћи и крајне тачке четврте и средње пропорционале, и да се на овај начин све геометријске конструкције, које се у систему Σ изводе у равни, могу извести на површини F *без употребе XI-е аксиоме*. Тако напр. може се 4 R поделити у произвољан број једнаких делова, ако се ова деоба да извести у систему Σ.

Напомена. У првом одељку овог параграфа Бољај је решио следећи конструктивни задатак: ако су дате две паралелне (am и bn), да се конструише права (ab), која ће са њима заклапати једнаке углове (dbn и dam).

§ 38

Ако се (по §-у 37) конструише напр. $nbq = \frac{1}{3} R$ и (по §-у 35) подигне, у систему S, на $\overrightarrow{bq}$ управна $am \parallel\!| bn$ и (по §-у 37) конструише $jm \simeq bn$ (фиг. 14), биће (§ 28), ако је $ja = x$,

$$X = 1 : \sin \frac{1}{3} R = 2,$$

и x ће бити *геометријски* конструисано.

И nbq може се тако израчунати, да ja отступа од i мање од сваке дате количине, што ће бити случај ако је $\sin nbq = \frac{1}{e}$.

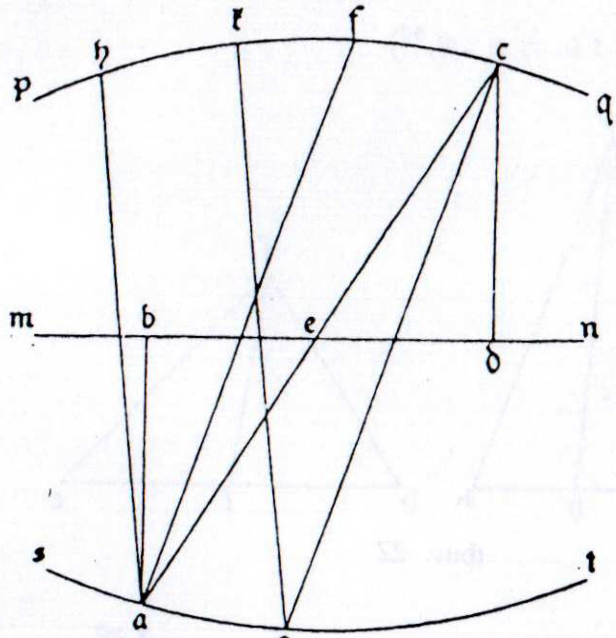
Напомена. У овом параграфу Бољај даје приближну конструкцију константе i, која преставља у неевклидској равни природну јединицу дужине (упор. § 33, III). Ако се наиме угао nbq конструише тако да износи 21° 35′ и 5″, 63 биће $\sin nbq = \frac{1}{e}$ (упор. напомену 2 уз § 30).

---

88) У L — линијским троуглима (у фиг. 7) bdg и bac, који су слични (упор. напомену 1 уз § 21), биће $bg : bc = bd : ba$, а пошто је $bg = \frac{bc}{2}$ биће и $bd = \frac{ba}{2}$, дакле $bd = da$, а одавде следује да је и праволинијско $bd = da$. Пошто је $ba \perp dq$, то на основу §-а 8 следује да је $\sphericalangle dbn = \sphericalangle dam$.

§ 39

Ако су (у равни) pq и st || са правом mn (§ 27) и ab, cd, које су управне на mn, једнаке[89]) (фиг. 19), биће очевидно $\triangle dec \equiv \triangle bea$ и углови (можда криволиниј-ски) ecp, eat такође конгруентни, као и $ec = ea$.



Фиг. 19

Ако је даље $cf = ag$, биће $\triangle acf \equiv \triangle cag$ и сваки од њих половина *четвороугла* fagc, Ако су fagc, hagk два таква четвороугла над ag између pq и st, њихова једнакост увиђа се лако (као код *Евклида)*, као и једнакост троуглова agc, agh, који имају заједничку основицу и чија темена леже у pq.

Даље су $acf = cag$, $gcq = cga$ и $acf + acg + gcq = 2R$ (§ 32), као и $cag + acg + cga = 2R$, тако да је у сваком оваком троуглу збир сва три угла $= 2R$.[90])

Било да ag (које је || mn) пада уједно са правом ag било да не пада, јасно је да су како сами *праволинијски* троугли agc, agh тако и *њихове суме углова* међу собом једнаки.[91])

§ 40

Једнаке површине троугли abc, abd (одсада *праволинијски*), *који имају једну страну једнаку, имнју једнаке суме углова* (фиг. 20).

Јер нека mn пролази кроз тачке које полове ac и bc и нека је pq (која пролази кроз тачку c) || mn; тада ће d падати у pq.

Јер ако полуправа $\overrightarrow{bd}$ буде секла $\overline{mn}$ у тачци e, а (§ 39) $\overline{pq}$ на остојању $ef = eb$, биће $\triangle abc = \triangle abf$ као и $\triangle abd = \triangle abf$, са чега ће d пасти уједно са f.

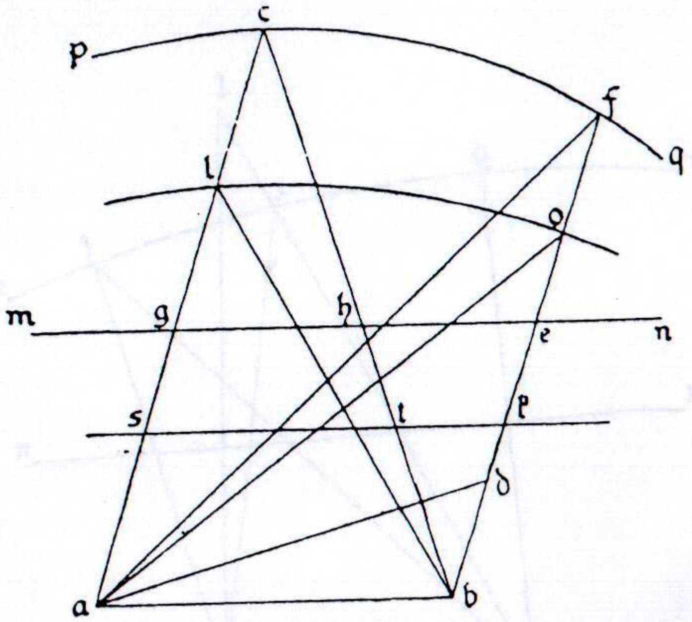
---

[89]) Друкчије речено, ако су pq и st линије једнаког остојања које подједнако одстоје од праве mn.

[90]) Према томе је у троуглу фиг. 19-е, који лежи између две линије једнаког остојања и чија је једна страна (ag у фиг. 19) сегмент линије једнаког остојања а друге две стране праве (ac, gc), збир углова $= 2R$.

[91]) Ако сегмент линије једнаког остојања ag пада уједно са правом ag (у фиг. 19 треба тачке a и g спојити правом линијом), што је Евклидов случај, збир углова у троуглима agc, agh биће $= 2R$. Ако пак ag не пада уједно са правом ag, биће збир углова у праволинијском троуглу agc очевидно $< 2R$.

Ако пак $\overrightarrow{bd}$ не буде секло $\overline{mn}$, нека је с тачка у којој управна која полови ab сече $\overline{pq}$, и $gs = ht$, тако да st *продужено* bd сече у извесној тачци к (да је ово могуће увиђа се на сличан начин као у §-у 4). Нека је даље $sl = sa$, $lo \parallel st$, и о пресек линија $\overline{bk}$ и $\overline{lo}$. Тада би био (§ 39) $\triangle abl = \triangle abo$ и $\triangle abc > \triangle abd$[92]) (противно претпоставци).



Фиг. 20

Напомена. У претходном параграфу Бољај је утврдио став, да су троугли, који леже између двеју линија једнаког остојања (подједнако удаљених од једне праве) и који имају заједничку основицу (било да су ти троугли криво-праволинијски или праволинијски), по површини својој једнаки и да им је једнак и збир углова. У овом параграфу он утврђује став, да *еквивалентни* праволинијски троугли (т. ј. троугли исте површине), који имају једнаку једну страну, имају једнак збир углова.

§ 41

Троугли једнаке површине abc, def имају једнак збир углова (фиг. 21).

Јер нека mn полови ac и bc и нека pq полови df и fe, и нека су $rs \parallel mn$ и $to \parallel pq$. Управна ag на rs или ће бити једнака са управном dh на to, или неће бити једнака: dh напр. биће већа. У сваком од ова два случаја ○ df описана из центра a имаће са $\overrightarrow{gs}$ заједничку извесну тачку к и биће (§ 39)

$$\triangle abk = \triangle abc = \triangle def.$$

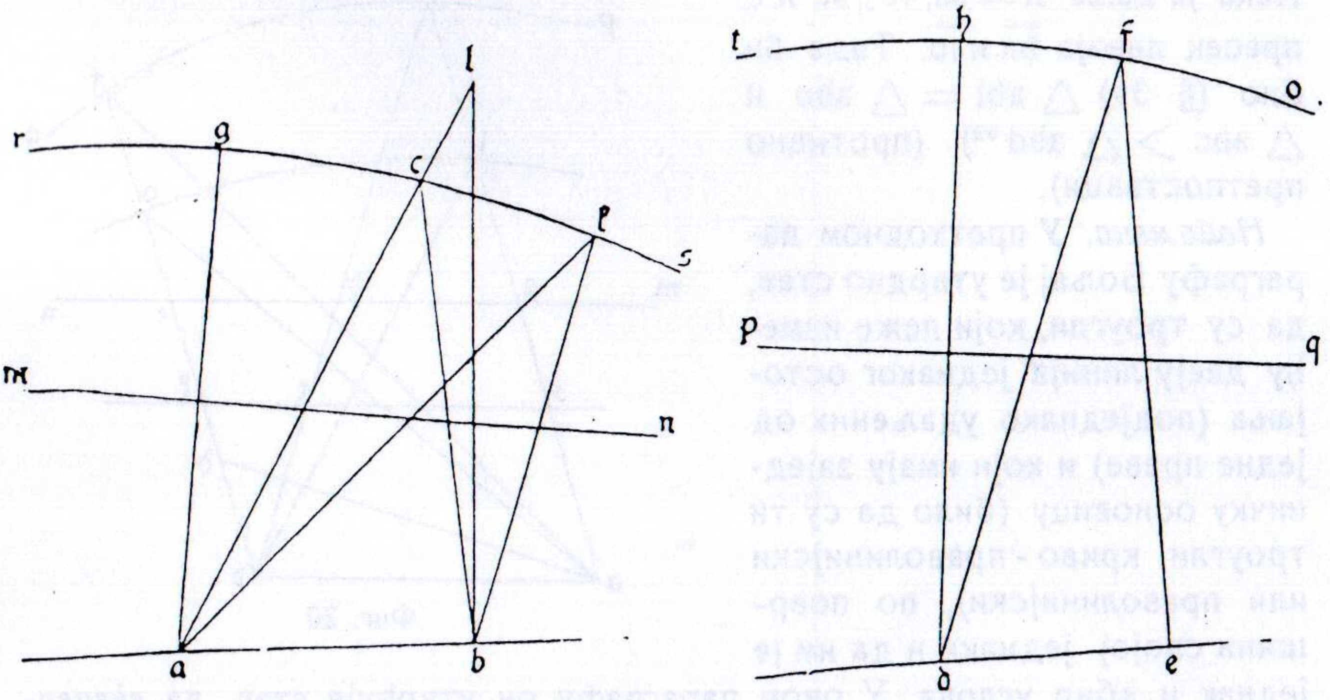
Али како (по §-у 40) троугао abk има исти збир углова као и $\triangle def$ и (по §-у 39) $\triangle abc$, то ће и троуали abc, def имати исти збир углова.

У систему S да се теорема и обрнути. Јер нека троугли abc, def имају исти збир углова и нека је $\triangle bal = \triangle def$. Тада ће (на основу

[92]) Кад би био $\triangle abl = \triangle abo$, то би, пошто је $\triangle abd < \triangle abo$, било $\triangle abd < \triangle abl$. Али како је $\triangle abl < \triangle abc$, морао би бити $\triangle abd < \triangle abc$, што противречи претпоставци по којој је $\triangle abd = \triangle abc$. Према томе bd мора сећи mn и (као и у првом случају) тачка d падати уједно са f (на pq).

претходнога) ова два троугла, па према томе и троугли abc, abl, имати исти збир углова, одакле очевидно следује

$$bcl + blc + cbl = 2R.$$ [93])



фиг. 21

Али (§ 31) сума углова у сваком троуглу износи, у систему S, $< 2R$. Тачка l пада дакле уједно са тачком c.

Напомена. У овом параграфу Бољај је доказао став, да је збир углова једнак у свима (праволинијским) троуглима који имају једнаку површину.

§ 42

Ако се комплемент збира углова до 2R у троуглу abc означи са u, а у троуглу def са v, биће $\triangle abc : \triangle def = u : v$ (фиг. 22).

Јер ако се сваки од троуглова acg, gch, hcb, dfк, кfe стави $= p$[94]), и $\triangle abc = mp$, $\triangle def = np$, и ако је s збир углова свакога од троуглова који је $= p$, биће очевидно:

---

[93]) Пошто се наиме лако дâ показати да је, ако је збир углова у *једном* троуглу $= 2R$, тај збир у *сваком* троуглу $= 2R$, и ако је збир углова у *једном* троуглу $< 2R$, тај збир у *сваком* троуглу $< 2R$, и пошто би, ако је један троугао састављен из друга два (као што је $\triangle$ abl састављен из $\triangle$ abc и $\triangle$ bcl), збир углова у целом троуглу могао бити једнак са збиром углова у једном од саставних троуглова (т. ј. збир углова у $\triangle$ abl једнак са збиром углова у $\triangle$ abc) само ако би збир углова у троуглу уопште био $= 2R$, то би тај збир морао и у другом саставном троуглу ($\triangle$ bcl) бити $= 2R$.

[94]) Друкчије речено, ако се троугли abc и def раставе у мање троугле, који ће сви бити по површини једнаки и $= p$.

$$2R - u = ms - (m - 1)\ 2R = 2R - m\ (2R - s)^{95)}$$

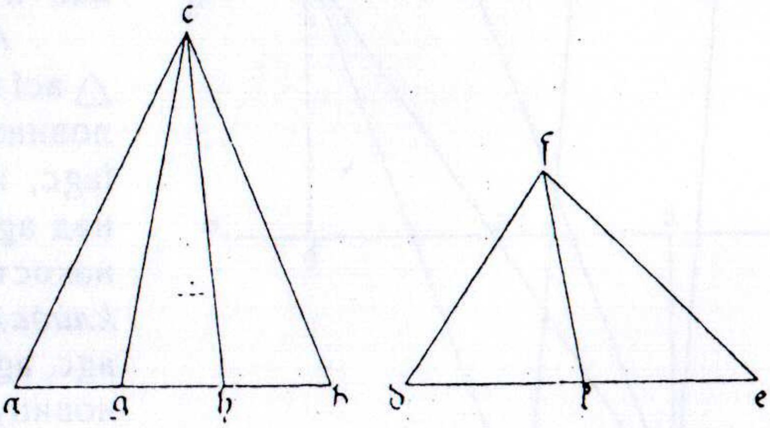
и $$u = m\ (2R - s),\ \text{као и}\ v = n\ (2R - s).$$

Према томе је

$$\triangle abc : \triangle def = m : n = u : v.^{96)}$$

Лако се увиђа да се став може проширити и на случај кад су троугли abc, def инкомензурабилни.

На исти начин се доказује, да се троугли на површини кугле односе као *ексцеси* збира њихових углова над 2R. Ако су два угла сферног троугла прави, трећи z биће речени ексцес; али овај је троугао (ако се обим највећег круга означи са p) очевидно $= \frac{z}{2\pi}\frac{p^2}{2\pi}$ (§ 32, VI); према томе је сваки троугао, чији је ексцес $= z$, $= \frac{zp^2}{4\pi^2}$.



фиг. 22

Напомена. У првом одељку овога параграфа Бољај је доказао став, да се површине два троугла у неевклидској равни односе као *дефекти* њихових збирова углова.

§ 43

Сада ћемо *површину* праволинијског троугла у систему S изразити збиром његових углова.

Ако ab (фигура 15) буде расло у бесконачност, биће (§ 42) $\triangle abc : (R - u - v)$ константно [97]). Али како $\triangle abc \doteq bacn$ (§ 32, V) и $R - u - v \doteq z$[98]) (§ 1), то је

$$bacn : z = \triangle abc : (R - u - v) = bac'n' : z'.$$

---

[95]) Збир углова у троуглу abc (т. ј. $2R - u$) биће очевидно раван збиру углова у троуглима acg, gch, hcb смањеном за збир углова у теменима g и h. Ако се збир углова у троуглима acg, gch, hcb, чији је број m, означи са s, биће (пошто је број тачака g, h и т. д. раван $m - 1$), $2R - u = ms - (m - 1)\,2R$.

[96]) Пошто је $\triangle abc = mp$, $\triangle def = np$ и пошто је $m = \frac{u}{2R - s}$ и $n = \frac{v}{2R - s}$, то су $\triangle abc\ \triangle def = m : n = u : v$.

[97]) Из формуле $\triangle abc : \triangle def = u : v$ (§ 42) следује $\triangle abc : u = \triangle def : v = \text{const.}$ Ако се ова константна вредност означи са λ, површина троугла са f, а дефект са u, биће очевидно $f = \lambda u$.

[98]) Како је наиме (фиг. 15) $\lim\ (R - u - v) = R - \lim u - \lim v = R - (R - z) - 0$ то је $\lim\ (R - u - v) = z$.

Даље је очевидно $bdcn : bd'c'n' = z : z' = tgz : tgz'$ (§ 30).[99])
Али за $y' = 0$ имамо $\frac{bd'c'n'}{bac'n'} = 1$ а тако исто и $\frac{tgz'}{z'} = 1$. Према томе је
$bdcn : bacn = tgz : z$.

Како смо нашли да је (§ 32)

$$bdcn = ri = i^2\ tgz, \text{ то је } bacn = zi^2\ ^{100)}.$$

За сваки троугао, чији је z комплемент збира углова до 2R и који ће у будуће укратко бити означен са $\triangle$, биће према томе $\triangle = zi^2$.[101])

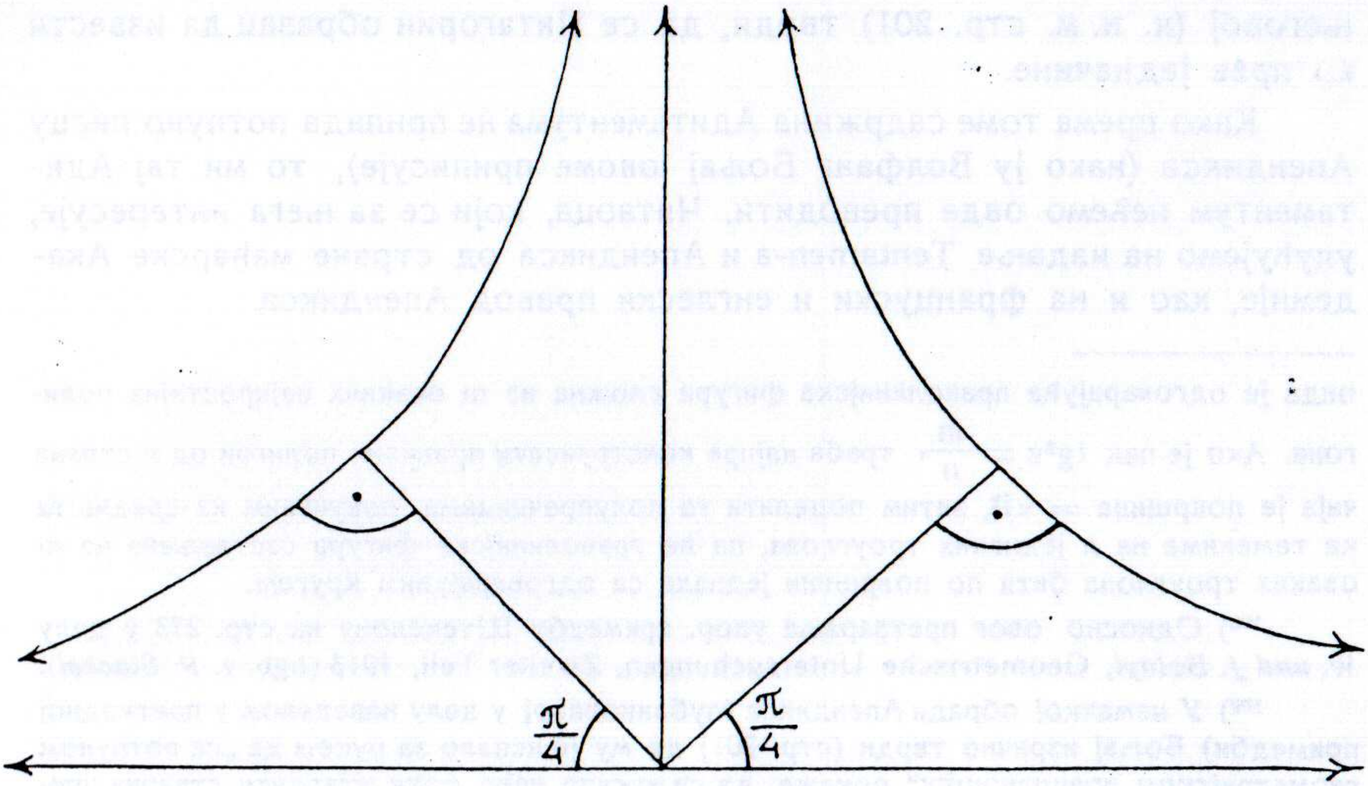
Одавде се лако увиђа да ће, ако је (фиг. 14) $or \parallel am$ и $ro \parallel ab$, *површина* обухваћена од правих or, st, bc (која је очевидно апсолутна граница за површине праволинијских троуглова који у бесконачност расту, или граница од $\triangle$ за $z \doteq 2R$) бити $= \pi i^2 = \odot i$ у F.[102])

[99]) По §-у 32 је $bdcn = ri$ и $bd'c'n' = r'i$, а по §-у 30 је $r = i\ tgz$ и $r' = i\ tgz'$.

[100]) Троугао bacn у фиг. 15 преставља *асимтотични* троугао чије се *једно* теме налази у бесконачности (пошто се паралелне cn и ab секу у бесконачности). Ако се са z означи комплемент угла паралелизма за дистанцију ac (коначну катету троугла), онће површина тога троугла $= zi^2$.

[101]) Да је површина макаквог троугла неевклидске равни, ако се са z означи његов дефект, $= zi^2$, дâ се извести на следећи начин. Ако се површина троугла означи са f биће (упор. прим. 97) $f = \lambda z$; како из формуле за правоугли асимтотични троугао $(= zi^2)$ следује да је $\lambda = i^2$, то је очевидно $f = zi^2$ за сваки троугао.

[102]) Да је површина асимтотичног троугла са *три* темена у бесконачности $= \pi i^2$, дâ се простије извести овако. Као што показује сл. 3', правоугли асимтотични



Сл. 3'

троугао са *два* темена у бесконачности састављен је из два правоугла асимтотична троугла са једним теменом у бесконачности, а асимтотични троугао са *три* темена

Ако ову граничну фигуру означимо са $\square$, биће даље (по §-у 30) $\pi r^2 = tg^2 z \cdot \square = \odot r$ у F (§ 21) $= \odot s$ (по §-у 32, VI), ако се тетива dc означи са s.

Ако се сада дати полупречник s круга у равни (или L-линијски полупречник круга у F) управном преполови, затим (по §-у 34) конструише $bd \parallel\!\!| \simeq cn$, спусти управна са на db и подигне управна cm на ca, добиће се угао z. Одавде да̂ се (по §-у 37) *геометријски одредити* $tg^2 z$, пошто се за јединицу узме произвољно један L-линијски полупречник, *помоћу две униформне линије исте кривине*[103]) (које се, ако су дате само њихове крајње тачке, пошто се конструишу осе, могу узајмно мерити као праве линије и у овом погледу сматрати за идентичне са правим линијама).

Даље да̂ се на следећи начин конструисати четвороугао, напр. правилни, који је $= \square$. Нека је (фиг. 23)

$$abc = R,\ bac = \frac{1}{2} R,\ acb = \frac{1}{4} R \text{ и } bc = x;$$

тада се да X (по §-у 31, II) изразити самим квадратним коренима и (по §-у 37) конструисати; а пошто је дато X, може се (по §-у 38, или и 29 и 35) одредити и само x.[104]) А осмоструки $\triangle abc$ очевидно да је $= \square$.[105])

у бесконачности из два асимтотична троугла са два темена у бесконачности. Пошто је, на основу формуле zi^2, површина асимтотичног правоуглог троугла са једним теменом у бесконачности (у сл. 3') $= \frac{\pi}{4} i^2$, то је површина асимтотичног троугла са три темена у бесконачности (тзв. максималног асимтотичног троугла) $= 4 \cdot \frac{\pi}{4} i^2 = \pi i^2$.

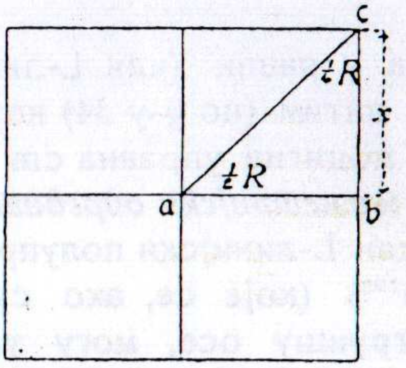
[103]) Ако се у правоуглом троглу ABC (са правим углом у C) на граничној површини спусти из темена C управна CD на хипотенузу AB (читалац може лако сам конструисати дотичну фигуру) биће $AC^2 = AD \cdot AB$ и $BC^2 = DB \cdot AB$, према томе $AC^2 : BC^2 = AD : DB$. Ако се однос $AC : BC$ стави $= tg\, z$, биће на овај начин (пошто је тада $AD : DB = tg^2 z$) конструисано $tg^3 z$.

[104]) На основу једначине (§ 31, *II*) $\cos\alpha : \sin\beta = \frac{1}{2}\left(e^{\frac{a}{i}} + e^{-\frac{a}{i}}\right)$ биће $\dfrac{\cos \frac{1}{2} R}{\sin \frac{1}{4} R} = \frac{1}{2}\left(e^{\frac{x}{i}} + e^{-\frac{x}{i}}\right)$, одакле следује да је $\Big($пошто је $\cos \frac{1}{2} R = \frac{1}{2}\sqrt{2}$ и $\sin \frac{1}{2} R = \frac{1}{2}\sqrt{2 - \sqrt{2}}\Big)$ је $e^{\frac{x}{i}} + e^{-\frac{x}{i}} = \dfrac{2\sqrt{2}}{\sqrt{2-\sqrt{2}}}$ и $e^{\frac{x}{i}} = X = \sqrt{\dfrac{\sqrt[4]{2}+1}{\sqrt[4]{2}-1}}$. Овај последњи израз да се, пошто садржи само квадратне корене у себи, геометријски конструисати. Из X одређује се конструкцијом x слично конструкцији x-a у §-у 38 (Упор. *J. Frischauf*, Absolute Geometrie nach Johann Bolayi, 1872, § 63, s. 72 и д, и Anhang 11, стр. 96, као и *J. Frischauf*, Elemente der absoluten Geometrie, 1876, § 90, s. 94. Оба ова списа Фришауфа, иако престављају слободну обраду а не превод Апендикса, била су преводиоцу од знатне помоћи за разумевање текста, а послужила су му на више места и при коментарисању Апендикса).

[105]) Пошто је дефект $\triangle$-а abc раван $\frac{\pi}{8}$, то је његова површина $= \frac{\pi}{8} \cdot i^2$. Према томе је површина квадрата (у фиг. 23) $= \pi i^2$

Према томе *на овај начин круг у равни полупречника s квадриран је геометријски помоћу праволинијске фигуре и униформних линија исте врсте (које су, упоређене међусобно, еквивалентне са правим линијама); тако исто је и круг на површини F компланиран на исти начин.*[106]) *Или је дакле истинита XI-а Евклидова аксима или је могућа геометријска квадратура круга;* иако остаје непознато која од ове две алтернативе одговара стварности.

23



Фиг. 23

Кадгод је $tg^2 z$ *или* цео број *или* рационалан разломак чији је именитељ (доведен на најпростији облик) *или* прост број облика $2^m + 1$ (где спада и $2 = 2^0 + 1$) *или* производ из произвољно много простих бројева ове врсте, од којих се (са изузетком броја 2, који се једини може јавити произвољно много пута) сваки јавља само *једанпут* као фактор, тада је могуће, на основу теорије полигона славног Гауса (овог највеличанственијег проналаска нашег и свих времена), конструисати једну праволинијску фигуру (и то само за речене вредности од z) која ће бити равна $tg^2 z \; \square - \odot s$.[107]) Јер *подела* $\square$-а захтева (пошто се теорема §-а 42 да лако проширити на макакве полигоне) очевидно *поделу* угла 2R, коју је (што се може показати) могуће геометријски извести само под реченим условом. У свима таквим случајевима оно што је напред речено лако доводи до циља. И свака праволинијска фигура да се геометријски претворити у правилни полигон од n страна, ако n има Гаусов облик.[108])

[106]) Т. ј. нађена је у неевклидској равни праволинијска фигура чија је површина једнака са површином круга у грацичној површини.

[107]) Као што је познато, по Гаусовој теорији полигона правилни полигон од n страна да се конструисати шестаром и лењиром само ако се биномна једначина $x^n = 1$ (која преставља поделу кружне периферије на n једнаких делова) да решити сукцесивним извлачењем квадратних корена. Ако је n прост број, то је могуће учинити само у оним случајевима када је n прост број облика $2^m + 1$ (при чему је m са своје стране потенција од 2, т. ј. $= 2^p$). Кад је пак n сложен број, тај сложен број мора бити $= 2^0 \cdot 3 \cdot 5 \cdot 17 \ldots\ldots$ где су 3, 5, 17 ит.д. прости бројеви облика $2^m + 1$. На тај начин могућа је само конструкција правилних полигона од 3, 5, 17, 257 ит.д. страна, као и конструкција правилних полигона од 2^n и $2^n \cdot 3$, $2^n \cdot 3 \cdot 5$, $2^n \cdot 3 \cdot 5 \cdot 17$ итд. страна.

У случајевима у којима је могућа конструкција правилног полигона од n страна могуће је у неевклидској равни конструисати круг једнаке површине са једним полигоном само онда када је $tg^2 z$ или цео број или рационалан разломак $\frac{m}{n}$ (т. ј. разломак у коме су m и n релативно прости цели бројеви). Најпростији је случај када је $tg^2 z = 1$, т. ј. када је $z = \frac{\pi}{4}$ (упор. напомену 2 уз § 30 и фиг. 2'): у овом случају праволинијска фигура, која има једнаку површину са кругом πi^2, или је асимтотични троугао максималне површине (у фиг. 3') или квадрат (у фиг. 23). Ако је $tg^2 z = m > 1$

Још би остало (да би се предмет потпуно исцрпео) да се докаже да је немогуће (без икакве претпоставке) одлучити, дали систем Σ или један (и који) од система S стварно постоји. Али то ћемо оставити за другу згоднију прилику[109]).

Напомена. 1. У овом завршном параграфу свога Апендикса Бољај је најпре извео формулу за површину праволинијског троугла, па затим показао да је квадратура круга у неевклидској равни могућа. Као што је познато, та је квадратура у Евклидовој равни зато немогућа, што број π није корен једне алгебарске једначине која се дâ решити сукцесивним извлачењем квадратних корена, пошто је π трансцендентан број (т. ј. није уопште корен једне алгебарске једначине).

Напомена 2. Уз II-у свеску оригиналног издања Tentamen-а додао је отац Бољајев један додатак (Additamentum) Апендиксу (изашлом уз I-ву свеску Tentamen-а) који садржи 1 доказ да формуле равне (неевклидске) тригонометрије (пошто им се најпре да такав облик да стране у њима садрже фактор $\sqrt{-1}$) прелазе у формуле сферне тригонометрије кад се стране у њима поделе са $\sqrt{-1}$; и 2. извођење, да Питагорин образац Евклидове Геометрије $a^2 + b^2 = c^2$ следује из прве једначине под III у §-у 30 Апендикса. Како аутор Апендикса (упор. §32) примећује да се Питагорин образац да извести из друге а не из прве једначине под III, то морамо закључити да извођење из прве једначине припада првобитно Волфгангу Бољају. Тај се закључак потврђујд и чињеницом, да и писац Апендикса у немачкој обради његовој (н. н. м. стр. 201) тврди, да се Питагорин образац да извести из прве једначине.

Како према томе садржина Адитаментума не припада потпуно писцу Апендикса (иако ју Волфанг Бољај овоме приписује), то ми тај Адитаментум нећемо овде преводити. Читаоца, који се за њега интересује, упућујемо на издање Tentamen-а и Апендикса од стране мађарске Академије, као и на француски и енглески превод Апендикса.

онда је одговарајућа праволинијска фигура сложна из m оваквих најпростијих полигона. Ако је пак $\operatorname{tg}^2 z = \frac{m}{n}$, треба најпре конструисати правилни полигон од n страна чија је површина $= \pi i^2$, затим поделити га полупречницима повученим из средишта ка теменима на n једнаких троуглова, па ће праволинијска фигура састављена из m оваквих троуглова бити по површини једнака са одговарајућим кругом.

[108]) Односно овог претварања упор. примедбу Штекелову на стр. 273 у делу *W. und J. Bolayi*, Geometrische Untersuchungen, Zweiter Teil, 1913 (hgb. v. *P. Stäckel*).

[109]) У немачкој обради Апендикса (публикованој у делу наведеном у претходној примедби) Бољај изрично тврди (стр. 201) да му је испало за руком да „са потпуном геометријском прецизношћу" покаже, да се никада неће моћи утврдити стварна природа простора у односу на евклидски и неевклидски систем. Он то своје извођење није међутим нигде публиковао, а ни у његовим рукописима оно се није нашло.