PRÉKOPA ANDRÁS

Bolyai János forradalma[1]

Első rész

Bolyai János a magyar tudomány legkiemelkedőbb alakja, nagyságát Kopernikuszéhoz hasonlíthatjuk. Az 1831-ben megjelent huszonhat oldalas, röviden Appendix címmel emlegetett művében (mely atyja, Bolyai Farkas kétkötetes monumentális összefoglaló munkája, a Tentamen első kötete appendixeként jelent meg) korszakalkotó eredményt ért el, létrehozta az ún. nemeuklideszi geometriát. Bolyai megtörte az euklideszi geometria egyeduralmát, felszabadította az utat az emberi gondolkodás előtt a tér másként való felfogása számára. Egyben utat nyitott a XX. század fizikai elméletei előtt, melyek gyökeresen megváltoztatták világképünket. Bolyai a matematikatörténet egészét jelentős mértékben alakította az axiomatikus gondolkodás terén elért eredményei révén. Elmondhatjuk, hogy a modern matematika XIX. és XX. században bekövetkezett fejlődése nagymértékben köszönhető Bolyai János munkásságának. Művének jelentőségét azonban csak halála után ismerték el, akkor sem ellenállás nélkül. Életében nem értették meg zseniális gondolatait, melyek már huszonegy éves korában megérlelődtek benne. Ezeket az ifjúság bátor forradalmiságával kifejtette, közreadta, nem félve a tudományos establishment bírálatától. Ebben persze nagyfokú naivitás is volt, mert azt hitte, hogy a nagy felfedezéseknek, köztük az övének, általában zöld út adatik az elismeréshez és a felfedezőknek a személyes dicsőséghez. Aki viszont megértette Bolyai gondolatait, nevezetesen Gauss, a „matematikusok fejedelme”, méltatlanul viselkedett Bolyai Jánossal szemben, amikor 1832-ben az Appendixről véleményt nyilvánított. Azt írta Bolyai Farkasnak, hogy János művét nem dicsérheti, mert ez azt jelentené, hogy saját magát dicséri. Ugyanis az abban foglalt eredmények, és az út, melyen járva ezek megszülettek, szinte szó szerint megegyezik harminc, harmincöt éves meditációjával. Gauss 1855-ben bekövetkezett halála után hagyatékát feldolgozták, és említett állításának írásos bizonyítékát nem találták. Gauss későbbi magatartása is kifogásolható. Amikor tudomást szerzett arról, hogy az orosz Lobacsevszkij is felfedezte lényegében ugyanazt, mint Bolyai János – az előbbit 1842-ben megválaszttatta a Göttingeni Királyi Társaság külföldi levelező tagjának –, nem tájékoztatta őt arról, hogy van még más is, aki hasonló eredményeket ért el.

Bolyai János
Széchenyi Kinga emlékérme

---

[1] Megjelent a Természet Világa, 133. évfolyam, 7.-9. számaiban, 2002. július, augusztus, szeptember

Hosszú ideig tartotta magát az a vélekedés, hogy Bolyai János az 1833-ban bekövetkezett nyugdíjaztatása után ugyan írt még egyet-mást, közöttük egy lényegeset is a komplex számok megalapozását illetően, de az elismerés hiánya depresszióssá tette és lényegében a matematikai alkotó munkától is visszavonult. Kiss Elemér marosvásárhelyi professzor volt az, aki erre rácáfolt, miután egy évtizedes munkával a hátrahagyott Bolyai-kéziratokat átböngészte és azokban jelentős, a kéziratok keletkezésekor új „matematikai kincseket" talált.

Bolyai János tudományos nagyságát külföldön fedezték fel, a hazai elismerés csak ezután következett. A XIX–XX. század fordulóján a kontinensen már széles körben ismertté vált műve. Angolszász területen is voltak, akik megismerték és lelkesedtek érte, de jóval kevesebben, mint Európában. A második világháború után a világ kétpólusúvá vált. Az oroszok nem sokat emlegették Bolyai Jánost, ők inkább Lobacsevszkij érdemeit hangsúlyozták. Amerikában pedig, mint említettük, nem ismerték eléggé tudósunkat.

1977, amikor Gauss születésének 200. évfordulóját ünnepelték világszerte, újabb fordulatot hozott. Jóllehet korábban is számos matematikatörténeti tanulmány szerzője Gausst tekintette a nemeuklideszi geometria első számú felfedezőjének, ez a tendencia felerősödött, háttérbe szorítva Lobacsevszkij személyét is. Az orosz szerzők sikerrel érvelnek e nézetek ellen Lobacsevszkij érdekében. Nekünk magyaroknak is kötelességünk, hogy rámutassunk, hol van Bolyai János helye a matematikatörténetben és az egyetemes kultúrtörténetben. A nagyvilág elé kell tárnunk erre vonatkozó dokumentumainkat és kutatási eredményeinket.

Bevezető megjegyzések

A török Magyarországról való kiűzését a karlócai béke (1699) zárta le. Az ezt követő Habsburg gyarmatosítási kísérletet a Rákóczi-szabadságharc képes volt ellensúlyozni, ám az ország függetlensége korlátozott maradt. Erdély nem került vissza az anyaországhoz, ahogy ez a török idők előtt volt. Továbbra is fejedelemség maradt, de most már a Habsburg uralkodó örökös tartományként kezelte. Mária Terézia 1765-ben a nagyfejedelemség rangjára emelte. Az Erdélyi Kancellária Bécsben működött. Otthon, Erdélyben a főkormányszék, a gubernium élén kormányzó állt, volt külön főhadparancsnokság, megyei autonómia, országgyűlés. Míg Horvátország csak Magyarországon keresztül tartozott Bécshez, addig Erdély közvetlenül.

Az erdélyi főhadparancsnokság azonban nem jelentette Erdély hadügyi értelemben vett függetlenségét. A hadügy magyarországi viszonylatban is a központi hatalom, az uralkodó hatáskörébe tartozott. Azért kapta Bolyai János 1823-ban a császári és királyi hadmérnök címet, mert csak császári és királyi hadsereg volt.

A XVIII. század második felében Erdélyben is és Magyarországon is megindult a polgárosodás. Kosáry Domokos (2001) kitűnő könyve jó képet ad a szatmári béke és a kiegyezés közötti korról, ezen belül a Bolyaiak koráról is. Témánk szempontjából azonban fontos néhány egyéb dolog említése is.

Politikai és kulturális szempontból Erdélyre és Magyarországra egyaránt a német nyelvterület mozgalmai voltak nagy hatással. A német nyelvterület nagyobb része a Szent Római Birodalom keretébe tartozott, kisebbik része csak a bécsi uralkodó alá. Ám I. Lipót 1658-ban történt megkoronázásától a birodalom 1806-ban bekövetkezett bukásáig a Bécsben székelő Habsburgok és Habsburg-Lotaringiaiak uralkodtak a birodalom, az osztrák hercegségek, a magyar és cseh királyság, az erdélyi fejedelemség stb. felett. A Szent Római Birodalom laza politikai formációt jelentett. A harmincéves háborút lezáró vesztfáliai béke után létrejött az ún. Reichstag, afféle parlament, melynek végül csekély törvényhozó szerepe volt fennállásának 143 éve alatt. Ebből a szempontból fontosabbak voltak az egyes német államok: Baden, Bajorország, Szászország, Poroszország stb. A XVII. századbeli németek között azonban sokak számára fontos volt a birodalomhoz való kötődés. Nekik a Reich egyenlő volt Németországgal, magukat pedig nem szásznak, porosznak stb., hanem elsősorban németnek tekintették.

A német iskolák, egyetemek nagyon különböztek abban, hogy mit és hogyan oktattak. Nem volt egységesen érvényesített norma, az sem volt előírva, hogyan épülnek egymásra az oktatás szintjei. Kevesen jártak sokáig iskolába és kevesen mentek egyetemre. A XVIII. század folyamán az egyetemre beiratkozott hallgatók száma csökkent. Az egyetemek kicsik voltak, számuk azonban nem volt kevés. Az 1780-as évben Ausztriában hat, a többi német államban huszonnégy egyetem működött. Ekkoriban Lipcsében 360, Halléban 400, Göttingenben pedig (1787-ben, 50 évvel alapítása után) 810 hallgató iratkozott be (l. Sheehan, 1944). Az utóbbi a legdinamikusabban fejlődő német egyetem volt. Egyben egyike volt az elit egyetemeknek. Arisztokrata családok szívesen küldték fiaikat erre az egyetemre, melyet anyagilag is hathatósan támogattak. A hallgatóság többsége azonban ügyvédek, tanárok, tisztviselők fiaiból tevődött össze.

Benkő Samu (1979, 294–313. old.) „Göttingen, Gauss és Erdély” című tanulmányában betekintést nyújt a göttingeni egyetem és az erdélyiek kapcsolatába. Ez az egyetem többek között arról is híres volt, hogy nem korlátozta a gondolat szabadságát. A vallásszabadsághoz szokott erdélyiek emiatt is vonzódtak ide. A sok erdélyi diák között az egyik leghíresebb, Bolyai Farkas 1796–1799 között volt az egyetem hallgatója. A sors akaratából ebben az időben, 1795–1798 között Gauss is itt tanult és a két ifjú között életre szóló barátság szövődött.

Az egyetemi oktatás általában költséges volt, különösen Göttingenben. Ha egy család taníttatni akarta fiát, akkor vagy jómódúnak kellett lennie, vagy pártfogót kellett találni, aki a költségeket fedezte. A történetírók azt is megírták, hogy az egyetemeken nagy divat volt az ivás, párbajozás, felelőtlen viselkedés. Emiatt sok család nem szívesen küldte fiát egyetemre. A kilengések mérsékeltebbek lehettek Göttingenben, ahol az elöljáróság az erkölcsre is vigyázott. A XVIII. század végére a legtöbb állam valamilyen módon szabályozta az egyetemek életét, autonómiájához azonban nem nyúlhatott.

Lengyelország 1772. évi felosztásával Poroszország összefüggő területté vált. A Hohenzollern uralkodóház bővelkedett tehetségekben. Számunkra most különösen fontos Nagy Frigyes és kora (1740–1786). Uralkodásának végére és az utána következő néhány évre esik Immanuel Kant, minden idők egyik legnagyobb filozófusa főműveinek a megjelenése. Kant (1724–1804) Königsbergben született, ott élt és alkotott, ott is halt meg. Königsberg a német kultúra nagy városa, sok tudós, művész született, élt ott. Kant főműve, A tiszta ész kritikája 1781-ben jelent meg, második kiadása pedig 1787-ben. A filozófus összesen negyven könyvet publikált, a „Kritika” sorozatba tartozik még két mű: „A gyakorlati ész kritikája” (1788) és az „Első bevezetés az ítélet kritikájába” (1790). Gondolatait először nehezen értették meg, később azonban, az 1780-as évek végére, Kant hatalmas kulturális erővé vált. Közép-Európa minden egyetemén előadták, tanulmányozták műveit, gondolatait társaságban és fehér asztal mellett is megvitatták. A Königsbergben megfordult utazók Kant legújabb szokásai, gondolatai iránt érdeklődtek és igyekeztek legalább látni a híres filozófust.

Kant a német felvilágosodás, az Auferklärung képviselője, e tekintetben Rousseau nagy hatást gyakorolt rá. Hume olvasása után azonban a racionalista filozófia (németországi képviselőjeként C. Wolffot említi) világától részben elfordult.

Kant kritikája összefüggésben volt az uralkodó, Nagy Frigyes toleráns magatartásával a felvilágosodás eszméit illetően. A tiszta ész kritikája előszavában kifejti, hogy a kor a bírálat kora, melyben szabadon lehet kritizálni intézményeket, államot, egyházat, szabadon lehet a gondolatokat a nyilvánosság elé tárni. Nagy Frigyes 1786-ban bekövetkezett halála után II. Frigyes Vilmos került a trónra, s a helyzet megváltozott.

Kant filozófiájában számunkra most a térre vonatkozó nézetei a legfontosabbak. Ahhoz, hogy megértsük, mit mond erről Kant, néhány definícióját előre kell bocsátanunk. Megkülönböztet analitikus és szintetikus ítéletet, a különbséget tartalmukban találja meg. Az analitikus ítélet egyszerűen feltárja az ítélet tárgyát, míg a szintetikus ítélet hozzáad valamit. A matematikai ítéletek, Kant szerint, mind szintetikusak. Frege (1884) bírálta ezt a különbségtételt, mondván, nem az állítások tartalma, hanem azok igazolása a fontos. A mi szempontunkból ez most nem lényeges. Kant elsősorban C. Wolff (1679–1754) filozófiájának kritikája céljából fogalmazott az említett módon.

Egy másik fogalom az intuíció. Arisztotelész különbséget tesz az intuitív és a demonstratív ismeret között. Szerinte a tudományos ismeretek legfőbb forrása az intuíció, mely közvetlenül, azonnal adódó ismeret, szemben a bizonyítások, demonstrációk révén szerzett tudományos ismeretekkel. Marad még a kérdés, hogy az intuíció a tudatunkban eleve benne lévő tudást, vagy a tapasztalat útján szerzett tudást jelenti-e. Kant a kettőt kombinálja, példa erre a tér általa adott fogalma, melyet A tiszta ész kritikájának Transzcendentális esztétika című fejezetében fejt ki.

Először megállapítja, hogy a geometria az a tudomány, amely a tér tulajdonságait szintetikusan és a priori meghatározza. A tér fogalmának eredetét szerinte az intuícióban kell keresnünk, mely a priori, vagyis az objektumokról szerzett bármiféle tapasztalat előtt bennünk van, koordináló szerepet tölt be külső érzékelésünk formájának létrejöttében. A tér a dolgoknak nem tulajdonsága, sem pedig ezek egymáshoz való viszonyának a meghatározója. Másképpen kifejezve, a tér semmilyen módon nincs az objektumokhoz csatolva. A tér tehát csak az ember számára létezik. Ha a szubjektum állapotától, mely a külső intuíciót lehetővé teszi, eltekintünk, akkor a tér reprezentációja üressé válik. Ámde vajon a tér geometriája euklideszi, vagy más is lehet? Kant disszertációjában (1770) még lehetségesnek tartja, hogy az euklideszi geometriától eltérő a tér szerkezete, később azonban elfordul ettől, és A tiszta ész kritikájában magától értetődőnek tartja az euklideszi jelleget. Ezt észrevesszük azokban a fejtegetésekben, amelyekben a filozófiai és a matematikai módszerek különbözőségét fejti ki.

Ezek után tegyük fel a kérdést: milyen volt a XVIII. század matematikája, különösen az évszázad második felében? Ugyanolyan volt stílusában, mint a mai, vagy a XIX. és a XX. századi? Igaza volt-e Herman Hankelnek, amikor azt írta (Hankel, 1884): „A legtöbb tudományban az újabb generációk lebontják azt, amit a régebbiek építettek, elvetik megállapításaikat. Egyedül a matematikában fordul elő, hogy az új generáció új emeletet épít a régi szerkezetre". Hankel megállapítása nem teljes mértékben felel meg a valóságnak. A legtalálóbb ellenpéldát a geometria szolgáltatja, melyről később szólunk bővebben. További példát találunk, amikor a XVIII. és az utána következő évszázadok matematikai egzaktságának szintjét vesszük vizsgálat alá. A XVIII. század matematikusai, Leibniz, a Bernoulli család tagjai, Euler, Taylor, Lagrange nem sokat törődtek azzal, hogy eredményeiket kifinomult egzaktsággal tálalják. Fontosabb volt számukra az eredmény, mint a szabatos bizonyítás. Ez persze nemcsak a XVIII. század matematikájára jellemző, hanem a reneszánsz óta érvényes volt (Grabiner, 1974).

A harmadfokú egyenlet gyökei képletének 1545-ben történt felfedezése után következett be ez az eredményorientált korszak, és kb. a XVIII. század végéig tartott. Erre az időre esik, többek között, a differenciál- és integrálszámítás, továbbá a valószínűségszámítás felfedezése. Bár az új eredmények első megjelenésükben gyakran nélkülözik az egzaktság magas fokát, az említett új irányzatok létrehozói számára fel sem vetődött az, hogy erre törekedjenek.

Mi késztette mégis a matematikusokat arra, hogy a XVIII. és a XIX. század fordulójától kezdődően nagy figyelmet szenteljenek a matematikai egzaktságnak? Két okot is említhetünk. Az egyik az, hogy a XVIII. század végére érezhetően lelassult az új matematikai eredmények elérésének üteme. Addigra az eredmények nagy sokasága jött létre, melyeket azonban rendszerbe kellett foglalni, egységesíteni és ez nem ment az egzaktságnak a korábbi szintjén. A másik, hogy a francia forradalom óta az uralkodók, mecénások anyagi helyzete megrendült, a matematikusoknak tanítaniuk kellett. Tanítani pedig csak logikusan felépített, tetszetős anyagot lehet eredményesen. A XVIII. század végén egyre erősödő egzaktsági igény egyik megnyilvánulása volt az, hogy 1784-ben a Berlini Akadémia, ahol Lagrange a Matematikai Szekció igazgatója volt, díjat tűzött ki a matematikai végtelen világos és precíz megalapozására (Grattan-Guinness, szerk., 1980). A díjat egyébként Simon L'Huilier nyerte el 1786-ban.

Cauchy, Bolzano, Peacock, Babbage és mások fáradoztak a függvénytan és általában az analízis egzaktifikálásán. A két utóbbi és Herschel 1813-ban Cambridge-ben megalapította az Analytical Society nevű szervezetet, mely az analízis egzaktifikálásán túl az Angliában elterjedt newtoni jelölésrendszer modernizálását is célul tűzte ki.

Megérett az idő a párhuzamossági axióma tisztázására is. A tudományos világ egy elegáns bizonyításra várt, arra, hogy valaki ezt levezeti a többi axiómából, ám nem ez történt. Az újkor matematikatörténetének legragyogóbb fejezete következett be, melynek során bebizonyosodott, hogy amit a túlnyomó többség várt, az lehetetlen. Az áttörés a magyar Bolyai János és az orosz Nyikolaj Ivanovics Lobacsevszkij munkája eredményeként született meg. Munkájukat később elemezzük, most Lobacsevszkij személyére való tekintettel néhány szót szólunk a XIX. század eleji oroszországi egyetemi állapotokról.

I. Sándor 1801-ben lett minden oroszok cárja. Nagy igyekezettel fogott hozzá, többek között, az egyetemek fellendítéséhez. Újból megnyitotta Dorpat egyetemét és négy városban új egyetemet alapított: Vilna (1802), Kazany (1804), Harkov (1804) és Szentpétervár (1819). Nagy súlyt fektetett a természettudományok és a matematika oktatására. Az egyetemek német típusúak lettek, a professzorok kötelessége volt a kutatás, az új tudományos eredmények ismerete, melyeket előadásaikba is be kellett építeniük. A hallgatóság létszáma nem volt nagy, 1809-ben a kazanyi egyetemre 40, a moszkvaira 135 hallgató iratkozott be. Az új egyetemeken, de a régieken is, sok külföldi professzor tanított. Ezek száma 1815 után lényegesen csökkent, ugyanis egy abban az évben kibocsátott rendelet kötelezővé tette, hogy az egyetemeken orosz nyelven kell tanítani. Egyidejűleg megtiltották, hogy tudósjelöltjeik Németországban tanuljanak és később azt is, hogy az egyetemek olyan tanárt vegyenek fel, aki Németországban tanult. Magyarázatként arra hivatkoztak, hogy Németországban az egyetemek istentelenek és a professzorok az ifjúságot szkepticizmusra és a hatóságok gyűlöletére ösztönzik. A külföldi professzorok ezt követően önként távoztak (Boyer, 1991).

Johann Martin Bartels (1769–1836), Gauss földije, Braunschweigben született, az iskolában Gauss instruktora volt, Kazanyban kapott professzori állást és Lobacsevszkij az ő tanítványa lett. Bartels Gaussnak közeli barátja lett és tudhatott arról, milyen fontos a paralelák problémája. Lehetséges, hogy Lobacsevszkij tőle hallott erről. Bartelsnek azonban, mint külföldi professzornak, távoznia kellett Kazanyból, így biztos, hogy amikor Lobacsevszkij az 1820-as években komolyan nekifeszült a probléma megoldásának, Bartels már nem volt ott. Azt is tudjuk (Szénássy, 1977/1980), hogy Lobacsevszkijre elsősorban Legendre (1794) műve hatott. Bolyai Farkas viszont bizonyára a göttingeni Kaestner professzortól hallotta a problémát. Kaestner ugyanis kitűnő ismerője volt ennek, tanulmányt is írt róla (l. Kaestner, 1790).

A Bolyaiak élete

A Bolyaiak életútját kellő részletességgel ismerjük. Schmidt Ferenc temesvári, majd budapesti építész volt az első, és egyben a legalaposabb, legáldozatosabb kutatója ennek. Atyja, Schmidt Antal ugyancsak temesvári építész volt, aki munkája során gyakran találkozott az 1823–1825 között Temesváron működő hadmérnök Bolyai Jánossal. Így Schmidt Ferenc atyjától is sok érdekeset hallott Jánosról, és egész életében fáradhatatlanul kutatott minden, a Bolyaiakkal kapcsolatos információ után. Kedvenc időtöltése volt a matematikával és a természettudományokkal való foglalkozás. Levelezésben állt több nyugati ország tudósával, és arra kérte őket, hogy folyamatosan tájékoztassák az országukban megjelent új tudományos könyvekről. Franciaországi kapcsolata a fiatal bordeaux-i matematikatörténész professzor, J. Hoüel volt, aki éppen Bolyai János művének egyik első felfedezője lett. Hoüel lefordította az Appendixet franciára és mellékelte a Schmidt Ferenc által írt, franciára lefordított Bolyai János-életrajzot. Ez az életrajz németül folyóiratban is megjelent (l. Schmidt, 1868). Ugyancsak Schmidt Ferenc szolgáltatta az ismeretek túlnyomó részét P. Stäckel Pál (1913) kétkötetes könyvéhez. Szénássy Barna (1970) szerint ezek az első kötet kétharmad részét teszik ki. A Bolyaiak életével foglalkozó első forrásmunkák között kell még megemlítenünk Bedőházi János (1897) könyvét, Szabó Péter (1910) és Schlesinger Lajos (1903) cikkét. A későbbi irodalomból Dávid Lajos (1922, 1979), Benkő Samu (1968, 1971, 1978, 1979), Szénássy Barna (1970), Kárteszi Ferenc (1973, 1977), Weszely Tibor (1981), Ács Tibor (1997), Kiss Elemér (1999) könyvét és Sarlóska Ernő (1965, 1973), Szénássy Barna (1977, 1980, 1983) cikkét említjük meg legfontosabb forrásmunka gyanánt.

A kolozsvári Bolyai-ház *(Bene József rajza)*

E cikk keretében nem elsősorban a Bolyaiak életével kívánunk foglalkozni. Teljesség kedvéért azonban erre is kitérünk.

Bolyai Farkas 1775. február 9-én született a Nagyszeben melletti Bolyán, ősi magyar nemesi családból. A bolyai várkastélyt a család a XIV. század elején kapta. Vitéz katonák voltak, ám az egyik Bolyai János, miközben a XVII. század első felében Törökországban raboskodott, a várkastélyt elveszítette. Egyre szegényebbek lettek, Bolyai Gáspár, Farkas édesapja, már csak egy kis birtokot örökölt Bolya mellett, mely akkor Nagy-Küküllő vármegyéhez tartozott. E birtokhoz járult még Bolyai Gáspár feleségének, Pávai Vajna Krisztinának az öröksége, egy Domáld melletti kisbirtok. Bolyai Farkas 6–13 éves kora között a nagyenyedi evangélikus-református kollégium tanulója volt. Ezután id. báró Kemény Simon tanulótársul vette Farkast fia, báró Kemény Simon mellé. Farkas a fiatal báróval jó barátságot kötött, mely élethossziglan tartott. 1790-től a kolozsvári református kollégiumban tanultak öt esztendeig. Eközben Farkas matematikai tehetsége egyre inkább megnyilvánult, ám foglalkozott zenével, rajzolással, sőt színjátszással is. 1795 őszén Kemény Simonnal útra kelt, hogy tanulmányait a németországi Göttingenben folytassa. Betegség miatt azonban Farkasnak vissza kellett fordulnia és csak 1796 tavaszán csatlakozott újból Kemény Simonhoz. Előbb Jénában töltöttek néhány hónapot, majd októberben beiratkoztak a göttingeni egyetemre. A „tanulótárs”-állás teremtette meg Farkas számára a megélhetést és a tanulási lehetőséget. Göttingenben életre szóló barátságot kötött Gauss-szal. Levelezésük Gauss halála után matematikatörténeti dokumentumgyűjtemény lett, nem teljes kiadásban magyarul is megjelent (Bolyai levelek, 1975, A Bolyai–Gauss-levelezés, 2001). Farkas a göttingeni évek után, 1799-ben Kolozsvárra került, rövid ideig házitanító volt. Megnősült, felesége Árkosi Benkő Zsuzsanna, egy kolozsvári chirurgus (akkori elnevezéssel borbély) leánya lett. Az ifjú pár Domáldra költözött, csak 1802 őszén jött be Kolozsvárra, a nagy eseményre, János születésére várva.

Bolyai Gáspár 1804-ben meghalt. Farkas még apja halála előtt elfogadta a marosvásárhelyi református kollégium professzori állását, matematikát, fizikát és kémiát tanított. Ezt a pozíciót 1851-ben bekövetkezett nyugdíjazásáig megtartotta. Az állás betöltésével kapcsolatos eljárás részleteit Benkő Samu (1979, 155–182. old.) ismerteti. Eszerint összesen tíz jelölt neve vetődött fel, a javaslattevők száma pedig huszonhárom volt. A legtöbb ajánlója a következő három jelöltnek volt: Sipos Pál, Bolyai Farkas és Marussi Mihály. Az 1804. január 22-én tartott konzisztoriális gyűlésen a tizenkét szavazatból Bolyai Farkas nyolcat, Marussi Mihály pedig négyet kapott. Így szótöbbséggel Bolyai Farkast választották meg, akinek kinevezési okmánya még aznap elkészült.

A marosvásárhelyi kollégium őse a XVI. század közepén keletkezett (Koncz, 1887). Épülete részben a Szent Miklósról elnevezett megyés szentegyház romjaira épült. A templomot Basta járása semmisítette meg 1600 körül (Orbán Balázs, 1868, Negyedik Kötet, 134. old). Az eredeti iskola kollégiummá való átalakítása a XVIII. század elején következett be, amikor a Sárospatakról elűzött református tanulókat befogadta. Farkas első házasságából János és egy korán elhalt leány született. A házasság nem volt boldog. Farkas szerint anyósa méregkeverő módján viselkedett, el akarta rabolni tőle Zsuzsannát. Másfelől Zsuzsanna idegbeteg volt, ennek jelei már a házasság első éveiben jelentkeztek és különösen elhatalmasodtak 1817 után. Hosszan tartó szenvedés után 1821-ben meghalt.

Bolyai Farkast tanári kinevezése idején részben természetben fizették: búza, bor, só, disznó, bárány, méz, fa, egy nagy lakás kerttel volt a javadalma, részben pedig bankóban kapott évi 400 magyar forintot. Négy év múlva tágasabb és erősebb házat építettek neki. Ezt kb. 100 év múlva, 1909-ben bontották le.

Vásárhely (ahogy akkoriban nevezték) a megyei és földesúri joghatóság alá nem tartozó, önkormányzattal rendelkező település, a székelység legnagyobb városa volt. Gótikus vártemploma a XV. századból való, a köré épített várat a domonkosok egykori kolostorából alakították ki. A vártemplomban, 1571-ben, a vallásszabadságot az unitáriusokra is kimondták, megerősítve a János Zsigmond fejedelem alatt 1560-ban hozott vallási türelmességi törvényt.

Farkas másodszor is megnősült, 1824-ben elvette a nála huszonkét évvel fiatalabb Somorjai Nagy Terézt, egy marosvásárhelyi kereskedő lányát. Második házasságából két gyermek, Gergely és Berta született. Az utóbbi már kiskorában meghalt, Gergely felnőttként Bolyán élt. A második feleség is beteges volt, fiatalon halt meg, 1833-ban. Ez a házasság az elsőnél sokkal kiegyensúlyozottabb volt.

Bolyai Farkas nagy tehetségű ember volt, matematikusként is híres, a nemeuklideszi geometria felfedezésének egyik előkészítője. Életét Eukleidész V. posztulátuma bizonyítására tette fel, ami, mint tudjuk, nem lehetséges. Fő műve a kétkötetes „Tentamen", mely 1832–1833-ban jelent meg és korának jeles összefoglaló munkája volt a matematikai ismeretek köréből. E műről Gauss is elismerőleg nyilatkozott, kiemelve annak precíz tárgyalásmódját. A Tentamen a marosvásárhelyi kollégium felsőéves hallgatói számára tankönyvként szolgált, ám a kötelező tananyagnál jóval többet tartalmazott. Bolyai Farkast 1832. március 9-én a Tudós Társaság levelező tagjává választotta, ám nem a Matematikai Osztályba, ahogyan ez több életrajzában szerepel, hanem a Természettudományi Osztályba. Alapul az 1830-ban megjelent magyar nyelvű „Arithmetica eleje" című könyve szolgált, nem a deákul írt Tentamen. Ez Döbrentei Gábor titoknok Bolyai Farkashoz intézett 1833. augusztus 29-i leveléből következtethető. A levélből az is kitűnik, hogy a titoknok sem Farkast nem ajánlhatta rendes tagnak, sem Jánost akármilyen tagnak, deákul írt munkáik miatt (Vekerdi, 2001).

Bolyai Farkas nemcsak nagy tehetségű matematikus, hanem sokoldalú zseni is volt. Drámái révén helyt kapott a magyar irodalomtörténetben. Egy másik, maradandó emlékű tevékenysége volt a kályhák, kemencék tervezése. Miután értesült arról, hogy Bécsben a takarékos kályhák tervezésének problémájával foglakoznak, ő is hozzákezdett a feladat megoldásához. Igen sok különböző variációjú kályhát gondolt ki és rakatott, illetve rakott saját kezűleg is. Így jöttek divatba Erdélyben a Bolyai-kemencék. Sok egyéb találmánya is volt: egy kerekeken álló ülés, melyet lábbal, bottal kellett hajtani; egy kerekeken álló, zsindellyel fedett „szekér-lak", a lakókocsi őse. Magánórákat adott zenéből és zeneelméleti előadásokat is tartott. A magyaron kívül folyékonyan beszélt németül, latinul, románul. Miután 1820-ban pályázatot írtak ki az erdélyi kamarai erdők főfelügyelői állására, Farkas, anyagi gondjai enyhítésére, megpályázta. Nem kapta meg, de az állás megszerzéséhez alapos erdészeti tanulmányokat folytatott és utóbb megírta az egyik első, magyar nyelvű erdészeti szakkönyvet. Szellemes, jó társalgóként kedvelt vendége volt a helybéli előkelő társaságoknak.

Bolyai Farkas 1856. november 20-án meghalt. Temetésén, kívánsága szerint, csak az „oskola csengettyűje" szólt, más ceremónia nem volt. Sírjára, meghagyása szerint, jelt nem tettek, hanem egy általa honosított pojnik almafát ültettek (Orbán Balázs, 1868, Negyedik Kötet, 133. old.). A híres professzor ugyanis a kertészetben is jeleskedett. A temetés után János megírta apja jellemzését. Bizonyos, hogy apa és fia között voltak összezördülések, ám nem ez volt a fő jellemzője kapcsolatuknak. János azt írta apjáról, hogy testileg is kiváló, egyetemes lángelme. Több más írásában is a legnagyobbak közé sorolja apját (Kiss Elemér, 1999). Másfelől, János életének az ismertetésében látni fogjuk, milyen nagyra értékelte az apa is a fiát.

Bolyai János 1802. december 15-én született Kolozsvárott, ahová a házaspár Domáldról bejött, hogy a szülés jobb körülmények között menjen végbe. A ház, melyben János született, anyja családjának a tulajdona volt, ma is áll és emléktábla jelöli. Két év múlva a család Marosvásárhelyre költözött, miután Farkast kinevezték az ottani kollégium professzorává.

János zsenialitása már gyermekkorában megnyilvánult. Hatéves korában csaknem magától megtanult olvasni, egy év múlva már németül és hegedülni is tanult. Kilencéves volt, amikor apja matematikára kezdte tanítani, tizennégy évesen már járatos volt a felsőbb matematikában, könnyen és rendkívüli készséggel dolgozott a differenciál- és integrálszámításban. Ezt apja írja Gaussnak 1816. április 16-án. Ebben a korban már a hegedülésben is szépen haladt, nehéz hangversenydarabokat játszott. Tizenkét éves korában lett a kollégium rendes tanulója. A három első osztályt kihagyva mindjárt a negyedikbe került. Ez ma az általános iskola nyolcadik osztályának felel meg. A rigurózumot 1817 júniusában tette le.

János továbbtanulásának kérdése már korábban is felvetődött. Erdélyben akkoriban még nem volt egyetem, a pesti és a bécsi egyetemeken viszont nem volt olyan szintű matematikaprofesszor, akitől az ifjú zseni sokat tanulhatott volna. Természetes volt a gondolat, hogy János Gausshoz menjen tanulni Göttingenbe. Nincs tudomásunk arról, hogy egy Bolyai Farkaséhoz hasonló megoldás – tanulótársként szerződni egy jómódú család fiához – felvetődött volna. Említettük, hogy akkoriban a német egyetemeken a diákok közül sokan kicsapongó életet éltek. Farkas tudhatta ezt, és talán ezért is akarta a göttingeni továbbtanulást oly módon megoldani, hogy János Gauss házában lakjon. Ez persze annál inkább indokolt volt, mivel János 1817-ben még csak tizenöt éves, Farkas pedig 1796-ban, huszonegy éves korában került Göttingenbe. Az 1817. évben kezdődő göttingeni továbbtanulásra gondolva 1816. április 10-én Farkas levelet írt Gaussnak. Ebben arra kéri Gausst, hogy fia három évig nála lakhasson, a költségeket megtéríti. Ezután azonban mindent elront, amikor arra kéri Gausst, közölje vele őszintén: „1. Nincs-e lányod, ki akkor (reciproce) veszedelmessé válhatnék…? 2. Egészségesek vagytok-e, nem szegények? Megelégedettek-e, nem zsémbesek? És főleg a feleséged kivétel a nők között? Nem változékonyabb, mint a szélkakas? Nem kiszámíthatatlan, mint a barométer változása?…”. Gauss erre a levélre nem válaszolt.

Ezután vetődött fel a bécsi hadmérnöki akadémián való továbbtanulás lehetősége. Farkas ezt az intézményt Göttingenbe utazása közben meglátogatta, valósággal beleszeretett és hajszálon múlt, hogy nem ragadt ott. Így hát jó szívvel ajánlhatta ezt fia számára. A szükséges anyagiakat azonban nem tudta azonnal előteremteni, ezért 1817-ben Jánost beíratta a vásárhelyi kollégium bölcsészeti szakára. A bécsi továbbtanuláshoz szükséges pénzt később a kollégium Kolozsvárott élő gondnoka, gróf Kemény Miklós (1791–1829) másokkal együtt teremtette elő, úgyhogy sikeres felvételi vizsga után 1818-ban János megkezdhette tanulmányit a Császári és Királyi Hadmérnöki Akadémián. Ez nyolc évfolyamból állt, kezdeni a negyedik osztályban, vagy lejjebb lehetett. Jánost felvették a negyedikbe, így négy év tanulási időre lehetett számítani. Kemény Miklós gróf ugyan (másokkal együtt) a teljes taníttatási összeget megadta, de sok mindenért kellett külön fizetni (pl. a lovaglásért), ezért szükség volt az apa anyagi segítségére is. Nem ment könnyen, mert a gazdasági helyzet az 1792 óta tartó francia háborúk következtében Erdélyben is megromlott, 1817-ben a papírpénzt kétötödére devalválták. Tudjuk, hogy 1820 körül Farkas fizetése már évi 200 ezüst rajnai forint volt, ám ez nem jött rendszeresen, csak késve és néha hiányosan. János taníttatási költsége kb. évi 900 forint volt, melyből kb. 130-at ezüstben kellett fizetni. Az első felszerelés költsége kb. 220 forint volt.

Sarlóska Ernő (1965, 1973) elsőként tárta fel Bolyai János katonaéveinek történetét, cikkeiben a hadmérnöki akadémiai éveken túl a további tíz katonaévről is érdekes tájékozódást meríthetünk. A hadmérnöki akadémián eltöltött évekről részletes beszámolót olvashatunk Ács Tibor (1997) könyvében. Most megelégszünk annak megemlítésével, hogy János kitűnő tanuló volt, akit tanárai első helyre tettek az évfolyam rangsorában, ámde diáktársai csak a második helyet juttatták neki és ez maradt az összesített sorrend is. A fő ok a rajzolásban való gyengébb szereplése volt; ezt János nagyon unta. Az akadémiai évek alatt, 1820-tól kezdődően, intenzíven foglalkozott a paralelák kutatásával, be akarta bizonyítani az V. posztulátumot, mellyel atyja már hosszú idő óta hasztalan kísérletezett. Óvja is ettől fiát 1820. április 4-i levelében: „Az Istenért kérlek! Haggy békét a paralleláknak, úgy irtozz tölle, mint akarmitsoda feslett társalkodástól, éppen úgy megfoszthat (mint engem) minden idődtől, egésségedtől, tsendességedtől, s egész életed boldogságától. Az a feneketlen sötétség talán ezer Newtoni óriási tornyokat elnyél – soha nem világosodik meg a földön – …”

Bolyai János 1822-ben elvégezte a hadmérnöki akadémiát, de még egy évig további tanulmányok folytatására, mint az első két legjobb tanuló egyikét, az akadémián tartották. 1823. szeptember elején azután kinevezték alhadnagynak és beosztották a temesvári erődítési igazgatósághoz. Innen írta 1823. november 3-án világszerte ismertté vált levelét apjának: „Kedves Édes Apám! Annyi teménytelen meg írni valóm van az ujj találmányaimról, hogy éppen most nem tudok másként segíteni magamon, mintha semmibe se ereszkedem belé, tsak egy kvartára írok;… A feltételem már áll, hogy mihelyt rendbe szedem, el-készítem, s mód leszsz, a parallelákról egy munkát adok ki; ebbe a pillanatba nints kitalálva, de az az út mellyen mentem, tsaknem bizonyosan ígérte a tzél el-érésit, ha az egyébaránt lehetséges; nints meg, de ollyan felséges dolgokat hoztam ki, hogy magam elbámultam, s örökös kár volna el-veszni; ha meg-látja Édes Apám meg-esméri; most többet nem szólhatok, tsak annyit: hogy semmiből egy ujj más világot teremtettem; mind az, valamint eddig küldöttem, tsak kártyaház a toronyhoz képest”.

Ma már tudjuk, hogy ez az „ujj más világ” az abszolút és a hiperbolikus geometria varázslatos világa. 1825 elején János hazalátogatott Marosvásárhelyre. Nagy sikere volt, főúri társaságokat bűvölt el személyével és hegedűjátékával az elegáns tiszt. Apja gyönyörködött fiában, nem utolsósorban matematikai zsenialitásában. Nagy, kemény természetű szép ifjú, írta apja Bodor Pálnak 1825. február 25-én. János egyébként kitűnő vívó is volt, már akadémiai évei alatt hírnevet szerzett ebben. Egy alkalommal, aradi tartózkodása alatt, tizenhárom lovastiszt hívta ki párbajra. János mind a tizenhárom kihívást elfogadta azzal a feltétellel, hogy két-két párbaj között játszhat a hegedűjén, és mind a tizenhárom esetben ő lett a győztes. Ha ez a történet igaz és a párbajok lovassági karddal történtek (lovastisztek voltak a kihívók), amiről köztudott, hogy igen nehéz, akkor ebből arra következtethetünk, hogy János nagy fizikai erejű fiatalember volt.

A sors úgy hozta, hogy amikor 1826-ban Aradra helyezték, közvetlen felettese az a Johann Wolter von Eckwehr lett, aki a hadmérnöki akadémián a matematika tanára volt. Vele János már korábban is levelezésben állt. Ebben az évben János átadta egykori tanárának német nyelvű kézírásos értekezését, melyben nemeuklideszi geometriai vizsgálatait foglalta össze. Ez a kézirat sajnos elveszett.

Jánost 1831-ben Lembergbe vezényelték, majd 1832-ben Olmütz lett katonai pályafutásának utolsó állomása. Lembergbe utazása közben Marosvásárhelyen meglátogatta édesapját.

Aradon Jánost gyakori láz gyötörte, feltételezhető, hogy a környékbeli mocsaras vidéken maláriás lett. Később a kolerát is megkapta, egészsége megromlott. Hozzájárult ehhez az is, hogy Lembergből Olmützbe menet szekere felborult és János súlyos fejsérülést szenvedett. Munkáját már korábban is elhanyagolta, nyilván nem érdekelte a sablonos tervezőmunka, és ahogy tudott, időt szakított matematikai problémák megoldására. Háromévi szolgálatmentes szabadságot akart kérni, hogy matematikai vizsgálatait tovább folytassa. Kérvényét 1832-ben juttatta el a hadmérnöki akadémia főigazgatójához, János főherceghez, aki azt elutasította. Végül, 1833-ban másodosztályú kapitányi rangban nyugdíjazták. Ebben szerepet játszott az is, hogy Lembergből Olmützbe utazása közben a határon összezördült a vámtisztekkel, nem akarván nekik ládáját kinyitni, akik ezután Jánost feljelentették.

1831-hez visszatérve, a legfontosabb esemény a latin nyelven írott Appendix különlenyomatként való megjelenése. A latinul írott Tentamen első kötete, János Appendixével egybefűzve, 1832-ben jelent meg. A második kötet megjelenésének éve 1833. Fontos momentum, hogy a Tentamen imprimatúrájának dátuma 1829. október 12.

A különlenyomatként megjelent Appendix egy példányát Bolyai Farkas szinte azonnal, 1831. június 20-án elküldte Gaussnak, annak véleményét kérve fiának művéről. Ez a példány elveszett, ezért Farkas 1832. január 16-án újból elküldte. Gauss 1832. március 6-án kelt válasza közismert. Ennek leglesújtóbb részletében írja a következőket: „Most valamit a fiad munkájáról. Ha azzal kezdem, hogy nem szabad dicsérnem: bizonyára meghökkensz egy pillanatra. Mást azonban nem tehetek: ha dicsérném, akkor magamat dicsérném, mivel a mű egész tartalma, az út, melyet fiad követ és az eredmények, amelyekre jutott, majdnem végig megegyeznek részben már 30-35 év óta folytatott elmélkedéseimmel”. Ezután, megírja, hogy neki is szándékában állt idevágó munkát papírra vetni, de életében ebből semmit sem kívánt nyilvánosságra hozni. Gauss más leveleiben még korábbra teszi azt az időt, amikor a nemeuklideszi geometriával már foglalkozott. Egy Gerlinghez írott levelében viszont elismeri, hogy 1798-ban eszméi még távol voltak attól az érettségtől, mely Bolyai János művében fellelhető. Gaussnak dicsérő jelzői is voltak Bolyai Jánosról és művéről, az idézett levél csapásainak fájdalmát azonban ezek nem tudták enyhíteni a fiatal titánban.

Bolyai János 1833-ban atyjához költözött Marosvásárhelyre, majd egy év múlva kiköltözött Domáldra, ahol 1846-ig lakott. 1834-től együtt élt a jó családból való Kibédi Orbán Rozáliával. Törvényes házasságkötésről nem lehetett szó, mert nem tudták előteremteni a kauciót, mely János katonatiszt volta miatt vált szükségessé. Két gyermekük született: Dénes (1837–1913) és Amália (1840–1893). Amáliának nem volt gyermeke, Dénesnek azonban három házasságából több gyermeke született. Egyik leszármazottja, Bolyai János, a mi Jánosunk dédunokája, ma is él Edelényben.

1837 mindkét Bolyai életében jelentős eseményt hozott. A lipcsei Jablonowski Tudományos Társaság 1834-ben pályázatot hirdetett a képzetes számok elméletének megalapozására (a pályázat eredeti szövege hosszabb, mai szemmel kissé furcsán hat). A pályázatról a Bolyaiak nem sokkal annak 1837. novemberi lejárata előtt értesültek, de mindketten pályáztak. Rajtuk kívül még a debreceni kollégium professzora, Kerekes Ferenc (1784–1850) pályázott. A Bolyaiak nem nyertek, Kerekesnek viszont odaítélték a díj felét. Bolyai János e műve, mely Respensio néven ismert, a komplex számok elméletének Hamilton (1805–1865) -féle megalapozásához hasonló elveken nyugszik. Bár a pályázatot 1837-ben adta be, maga az elmélet már 1831-ben készen volt, korábban, mint amikor Hamilton művét a dublini akadémiához benyújtotta.

Bolyai János számos további, a maga korában új matematikai eredményt ért el, erről Kiss Elemér (1999) alapvető felfedezései adnak tájékoztatást.

Bolyai János 1846-ban családjával Marosvásárhelyre költözött. Apja ugyanis elégedetlen volt János gazdálkodásával és a domáldi birtokot bérbe adta.

Az 1848-as év meglepetést hozott János számára. Kezébe került Lobacsevszkij (1840) munkája, melynek tartalma sok részletében megegyezik az Appendixével. Előbb arra gyanakodott, hogy meglopták őt, később azonban részletes észrevételeket tett e művel kapcsolatban. Ezeket Stäckel Pál és Kürschák József (1902) tette közzé nyomtatásban.

A szabadságharc idején, 1849-ben, kihasználva a lehetőséget, hogy nem volt szükség kaucióra, házasságot kötött Orbán Rozáliával. Ezt azonban később érvénytelenítették.

Bolyai János 1852-ben elköltözött családjától, házát feleségére hagyta és jelentős pénzösszeget is adott neki gyerektartásra. Gyermekeivel azonban továbbra is törődött. Betegeskedett, egy Szőts Júlia nevű szolgáló gondozta.

1857-ben féltestvérével, Gergellyel, aki Bolyán gazdálkodott, eladta Domáldot 1600 rajnai forintért.

1860. január 27-én Szőts Júlia levelet írt Gergelynek. Kérte, hogy jöjjön sürgősen, mert János rosszul van. Miután a levelet aláírta, gazdájára nézett, majd így folytatta „Míg a levelet meg írtam, adig meg hólt, így már nints mit tagadni a kapitány Ur nints többé”.

A temetésen az előírt katonai kíséreten kívül három civil vett részt. A református egyház anyakönyvében pedig a szokásos bejegyzések után odaírták: „Híres, nagy elméjü mathematicus volt, az elsők között is első. Kár, hogy talentuma használatlanul ásatott el”.

Később rámutatunk majd arra, hogy ennél szakmailag sokkal kompetensebb személyek sem tudták Bolyai János személyének és művének nagyságát akkoriban felmérni.

A két Bolyai síremléke a marosvásárhelyi református temetőben

Bolyai Jánosról nem maradt fenn kép. Volt egy kép, mely őt katonaruhában ábrázolta, ezt azonban Bolyai egy alkalommal dührohamában karddal szétkaszabolta. Újabban az a nézet válik egyre elfogadottabbá, hogy a marosvásárhelyi kultúrpalota homlokzatának a tetején lévő domborművek egyike őt ábrázolja. Az összesen hat dombormű közül ötnek az esetében sikerült megállapítani, hogy valóban azokat a személyeket ábrázolják, akiknek a neve a domborművek alatt olvasható. A hatodik alatt Bolyai János neve áll és ez közvetlenül Bolyai Farkas domborműve mellett helyezkedik el. Van azonban egyéb bizonyíték is, mégpedig azoknak a tanúságtétele, akik a palota építésének idején Bolyai Jánost még személyesen ismerték, továbbá az a feltűnő hasonlóság, ami a dombormű és Klapka György ismert portréja között fennáll. Márpedig Bolyai János feltűnően hasonlított Klapka György honvéd tábornokhoz. A fentiekről Staar Gyula (1990) könyvében Weszely Tibor ad részletes tájékoztatást. Az említett dombormű felhasználásával készült a 2002. évi Bolyai-évfordulóra, Széchenyi Kinga Bolyai Jánost ábrázoló plakettje.

Második rész

A Bolyai–Lobacsevszkij-geometria előzményei

A geometria szó az ógörög geometrein szóból ered, mely földmérést jelent. Az ókori geometria kezdetben egyszerű szabályok gyűjteménye volt, melyhez kísérletezés, adatgyűjtés és intuíció révén jutottak. Egyiptomban, Babilonban, Kínában stb. egyaránt léteztek ilyen ismeretek, ám a görögök voltak az elsők, akik geometriai állításokat deduktív úton vezettek le ismert, vagy nyilvánvalónak tartott állításokból. Közöttük is a milétoszi Thalész volt az első, aki a bizonyítás módszerét alkalmazta annak eldöntésére, hogy mely állítás igaz, illetve hamis. Ennek kapcsán létrehozta az első logikus geometriát. A rendszerező munkában őt Püthagorasz, a misztikus vallási szekta alapítója és a róla elnevezett tétel felfedezője követte.

Kr. e. 400 körül a matematikus (nem az orvos) Hippokratész összefoglalta a püthagoreusok ismereteit a sík geometriájáról. A mű az Elemek címet kapta. Bár ez nem maradt fenn, mégis valószínű, hogy Eukleidész első négy könyve ezen alapult.

Kr. e. 387-ben az athéni városkaputól mintegy másfél kilométer távolságra Platón megalapította híres iskoláját. Minthogy a terület, melyen az iskola elhelyezkedett, egykor Akadémosz tulajdona volt, és már az iskola megalapítása előtt az Akadémia nevet viselte, ez lett az iskola neve is. Platón Akadémiáján intenzív matematikai oktatás folyt, melyről igen jó összefoglaló képet ad Fowler (1999) könyve. Ennek az iskolának volt tanítványa Eukleidész, aki Kr. e. 300 körül kiadta az Elemek című, tizenhárom kötetes könyvét. Tudománytörténészek kimutatták, hogy az Elemek jelentős mértékben támaszkodik más, korábbi könyvekre, nevezetesen Architász, Eudokszusz és Theaitetosz könyveire.

Eukleidész Elemekje olyan mestermű, mely kétezer éven át forrása volt a geometriai ismereteknek. Legnagyobb érdeme, hogy ezeket egységes logikai rendszerbe foglalta, melyben kevés számú adott állításból, logikusan, egymásra épülve következnek az újabb és újabb állítások, deduktív bizonyítás útján. A kiindulást jelentő viszonylag kevés számú állítás egy része posztulátum, követelmény, más része pedig egyszerű állítás, axióma. Egyes kommentátorok azt állítják, hogy a posztulátum nem egyéb, mint feltevés, kiindulópont, melyet önkényesen választunk, és így igaz voltának kérdése nem vetődik fel, míg az axióma olyan állítás, mely mindenki számára nyilvánvaló. Mások szerint az Elemekben a posztulátumok inkább geometriai jellegűek, az axiómák pedig inkább univerzálisak. A mai tárgyalásban nem szokás különbséget tenni a kettő között, és valamennyi kiinduló állítást axiómának nevezünk. Ez a szokás tulajdonképpen már régi.

Az V. euklideszi posztulátum, a különböző geometriák kiindulópontja, Bolyai Jánosnál XI. axiómaként jelentkezik. A történelem folyamán az Elemek több kiadást ért meg, egyesekhez hozzá is adtak. A továbbiakban tehát, ha V. posztulátumról vagy XI. axiómáról írunk, ezen ugyanazt értjük.

Az Elemekben az axiómákon kívül vannak definíciók és tételek. Eukleidész definiálja a pont és az egyenes fogalmát: „Pont” az, aminek nincs része, „egyenes” pedig a kiterjedés nélküli hosszúság. Mai axiómarendszerünkben ezek nem definiált fogalmak, hiszen csak az objektumok egymással való kapcsolatát foglaljuk rendszerbe, az objektumok mibenlétét szabadon hagyjuk. Eukleidész bebizonyítja pl. azt, hogy a háromszög szögeinek összege $180°$, azaz $\alpha+\beta+\gamma=180°$, de ezt az egyenletet nem írja fel, hanem úgy fogalmaz, hogy a szögek összege két derékszög. Sem a + jel, sem a fok jele ekkor még nem volt használatban. Bebizonyítja Püthagorasz tételét: $a^2+b^2=c^2$, de ezt is másképpen fejezi ki, mégpedig a derékszögű háromszög oldalaira helyezett négyzetek területével. A nagy számú tétel bizonyítása során azonban olyan gondolatmeneteket is alkalmaz, melyek mai szemmel kifogásolhatók. Ebben szerepet játszik az is, hogy a geometria axiómarendszere az Elemekben még nem teljes. A mai egzaktsági igényünknek megfelelő axiómarendszert 1899-ben David Hilbert (1862–1945) fogalmazta meg. Bolyai, Lobacsevszkij és Gauss még az Elemek axiómarendszerén belül gondolkodott. Ez azonban nem jelenti azt, hogy tételeik érvényüket vesztették. Csupán arról van szó, hogy a régi tételeket ma az új keretek közé kell helyeznünk, és a mai diáknak (az egyébként igaz állítás) bizonyítását másképp kell tanítanunk. Pl. Bolyai idejében még a szemléletre hagyatkoztak, amikor arról volt szó, hogy egy egyenesen a C pont az A és B pontok között van, Hilbertnél a rendezés fogalma is axiomatikus megfogalmazású.

Hilbert axiómáit öt csoportba soroljuk, ezek a következők: (1) illeszkedési, (2) rendezési, (3) egybevágósági, (4) párhuzamossági és (5) folytonossági axiómák. Az utolsó előtti csoportba csupán egy axióma tartozik, melyet ebben a formában először John Playfair (1748–1819) fogalmazott meg.

Playfair párhuzamossági axiómája: minden l egyeneshez és egy rajta kívül fekvő P ponthoz legfeljebb egy olyan egyenes létezik, mely ezt a pontot tartalmazza és l-hez párhuzamos.

A fenti axiómák együttesen értelmezik az euklideszi geometriát. Playfair axiómájában a „legfeljebb egy olyan egyenes létezik” megfogalmazás kicserélhető azzal, hogy „pontosan egy olyan egyenes létezik”. Az ugyanis a többi axiómából bizonyítható, hogy létezik legalább egy a kívánalmaknak megfelelő egyenes.

A párhuzamossági axióma, Eukleidésznél az V. posztulátum, eredeti formája más. Eukleidész előbb értelmezi a párhuzamos egyenesek fogalmát: egy síkban vannak, és ha mindkét irányba meghosszabbítjuk ezeket a végtelenségig, nem metszik egymást. Ezt követően bebizonyítja, hogy ha az egyenesnek egy transzverzális egyenessel bezárt megfelelő szögei egyenlők, akkor ezek párhuzamosak. A fordított állítás bizonyításához megfogalmazza és felhasználja az alábbit.

Eukleidész V. posztulátuma: ha két egyenest metsz egy harmadik, és a keletkezett, ugyanazon az oldalon lévő belső szögek összege kisebb, mint két derékszög, akkor ezek az egyenesek a végtelenbe meghosszabbítva metszik egymást.

Hilbert axiómarendszerének legkézenfekvőbb modellje a síkgeometria. Ha nem akarunk a szemléletes pontokkal és egyenesekkel dolgozni, akkor gondolhatunk Descartes analitikus geometriájára, ahol ezek számokkal, ill. számhalmazokkal vannak megadva: egy pont egy (x, y) számpár, egy egyenes pedig azoknak az (x, y) számpároknak a halmaza, melyek eleget tesznek egy $y=ax+b$ egyenletnek, ahol a és b rögzített valós számok. Most azonban ezek az objektumok nem a vizuális pontokat és egyeneseket adják meg analitikusan (mint Descartes-nál), hanem ők maguk jelentik a pontokat, illetve az egyeneseket. Hasonló módon kapjuk az (x, y, z) számhármasok összességén belül a térgeometriát, a rendezett szám n-esek pedig elvezetnek a többdimenziós euklideszi geometriához.

Az V. posztulátum abban különbözik az első négytől, hogy nem tudjuk tapasztalati úton ellenőrizni. Csak egyenes szakaszokat tudunk megrajzolni, végtelenbe nyúló egyeneseket nem. A történelem folyamán, egészen Bolyai, Lobacsevszkij és Gauss koráig, e posztulátumot az elmélet szépséghibájának tartották és erős volt a hiedelem, hogy ez a többi axiómából bizonyítható. Bonola (1911) és Stäckel (1914) jó összefoglalást nyújt a párhuzamossági axióma különféle megfogalmazásairól, melyek a történelem folyamán előfordultak, és annak bizonyítási kísérleteiről. Mi ezzel csak röviden foglalkozunk.

Proklusz (Kr. u. 410–485) kommentárokat írt Eukleidész első könyvéhez, és ezekben tesz említést a korai bizonyítási kísérletekről. Ptolemaioszt (Kr. u. II. század) említi, többek között, bizonyítási kísérletét megbírálja, ám maga is elkövet egy hibását. Az arabok, akik a matematikai felfedezések tekintetében a görögök művét folytatták, szintén foglalkoztak az V. posztulátummal. Al-Nirizi (Kr. u. IX. század) kommentárokat írt Eukleidész első könyvéhez, Naszir Eddin (1201–1279) pedig a következő szellemes átfogalmazását adta az V. posztulátumnak: ha egy görbe minden pontja egyenlő távolságra van egy adott egyenestől, akkor ez a görbe maga is egyenes.

Nyugat-Európában az arab tankönyvek révén vált ismertté az Elemek, ezeket a XII. és a XIII. században lefordították latinra. Később, a XV. és a XVI. században megjelentek az eredeti görög szöveg alapján készített fordítások. A XVI. századtól a XVIII. század elejéig F. Commandino (1509–1575), C. S. Clavio (1537–1612), P. A. Cataldi (?–1626), G. A. Borelli (1608–1679), G. Vitale (1633–1711) és J. Wallis (1616–1703) voltak a legfontosabb matematikusok, akik az V. posztulátummal foglalkoztak, átfogalmazták, bizonyítását megkísérelték, a nem euklideszi geometria felfedezésének közvetlen előzményei előtt.

Az említett nyugat-európaiak közül Wallis eredménye a legérdekesebb. Feltételezve, hogy adott háromszöghöz tetszőleges méretű hasonló háromszögek (megfelelő szögeik egyenlők, de megfelelő oldalaik hosszúságai különbözőek) léteznek, levezette az V. posztulátumot. Itt felsejlik a Bolyai–Lobacsevszkij-geometria egy érdekes állítása: e geometrián belül egy háromszög mérete hasonlósági transzformációval nem növelhető, vagy csökkenthető. Nem lehet a háromszöget sem összehúzni, sem tágítani a szögek megtartása mellett. A hasonlósági transzformáció deformációt is eredményez.

A hiperbolikus geometria történetével foglalkozók körében megoszlanak a vélemények a tekintetben, hogy kik annak megalkotói és kik az előfutárok. Nem a Bolyai és Lobacsevszkij javára történő részrehajlás vezet, hanem csupán a matematikatörténetben alkalmazott normák elfogadása, amikor az alábbi megállapítást teszem: az újkori előfutároknak két csoportja van, a felfedezőknek egy, az alábbiak szerint. Az előfutárok első csoportjába tartoznak: Saccheri, Lambert, Legendre és Bolyai Farkas. Az előfutárok második csoportjába: Schweikart, Taurinus és Gauss. Felfedezők: Bolyai és Lobacsevszkij.

Ez csupán annyiban különbözik Stäckel és Engel (1895) klasszikus csoportosításától, hogy Gausst az előfutárok, és nem a felfedezők közé számítjuk.

Vannak más vélemények is, [l. pl. Bonola (1911), Gray (1979), Kline (1990)]. Bonola a felfedezők két csoportját különbözteti meg. Első csoport: Schweikart, Taurinus, Gauss, a második csoport: Bolyai, Lobacsevszkij. Gray a Riemann-geometriáig bezárólag vizsgálja a fejlődést, így szempontjai eleve mások. Kline egyébként nagyon informatív könyve Bolyai és Lobacsevszkij vonatkozásában felületes.

Bonola véleményével kapcsolatban elmondhatjuk, hogy ha Schweikart, Taurinus és Gauss a felfedezők közé soroltatnának, akkor ehhez a normához kellene igazítani a többi nagy matematikai felfedezés történetének a leírását is. Ebben az esetben pl. a differenciál- és integrálszámítás felfedezői nemcsak Newton és Leibniz lennének, hanem legalábbis még Kepler, Galilei, Cavalieri, Saint-Vincent, Roberval, Fermat, Toricelli, Descartes, Wallis, Barrow, Child és mások, az újkorban. Még sok, hasonlóan fontos matematikus nevét említhetnénk egész Arkhimédészig visszamenőleg.

Az alábbiakban felvázoljuk az előfutárok idevágó eredményeit és megindokoljuk véleményünket.

Gerolamo Saccheri (1667–1733) olasz jezsuita matematikus két művet tett közzé, az egyikben (1733) az V. posztulátum bizonyításával foglalkozott, a másikban (1697) viszont lényegében kiépített egy nemeuklideszi geometriát, amelyben adott egyeneshez egy rajta kívül fekvő ponton átmenő párhuzamos egyenes nem létezik. Ebben a műben is bizonyítani akarta az V. posztulátumot, indirekt úton, ámde ahelyett, hogy ellentmondásra jutott volna, megalapozta az elliptikus geometriát (mai szóhasználattal élve). Saccheri kiindulópontja egy négyszög, melynek alapján álló két oldal egyenlő hosszúságú és mindkettő az alappal derékszöget zár be. Mármost az alappal szemben lévő oldal az előbb említettekkel azonos nagyságú szögeket zár be, melyek lehetnek derékszögek, tompaszögek, vagy hegyesszögek. Ezeket hipotéziseknek tekintve Saccheri bebizonyítja, hogy ha egy négyszögre valamelyik hipotézis a három közül érvényes, akkor valamennyi négyszög esetére érvényes ugyanez a hipotézis. Ebből viszont következik, hogy ha egy háromszögben a szögek összege egyenlő két derékszög összegével, vagy annál nagyobb, ill. kisebb, akkor ez minden háromszögre ugyanúgy érvényes. Ez az eredmény az abszolút (V. posztulátum, vagy ellenkezője nélküli) geometria fontos és szép tétele, később alapja lett Bolyai és Lobacsevszkij területszámítási tételeinek. Saccheri azonban az 1733-ban megjelent könyve végén ad egy hamis bizonyítást az V. posztulátumra, mely mintegy konklúziója addigi vizsgálatainak. Tóth Imre (2000) úgy vélekedik, hogy Saccheri ezt az inkvizíciótól való félelmében tette, mert az általa közölt hamis bizonyítás átlátszóan leegyszerűsített.

Johann Heinrich Lambert (1728–1777) svájci származású matematikus és filozófus élete nagy részét Berlinben töltötte. A párhuzamosokról írt műve halála után jelent meg. Saccherihez hasonlóan, Lambert is egy négyzetet vett alapul, melynek azonban három szöge volt derékszög, a negyedik pedig a három lehetőség mindegyike. Ennek alapján beszél ő is három hipotézisről: hegyesszög, tompaszög, derékszög.

Lambert egyik legfontosabb eredménye a geometriai alakzatok mértékével kapcsolatos. Az euklideszi geometriában a hosszúság, terület, köbtartalom külön-külön additív mértékeket jelentenek. Ezen azt értjük, hogy egymás mellé helyezett szakaszok (ill. síkbeli, vagy térbeli alakzatok) egyesítésének hossza (területe, köbtartalma) az egyes hosszúságok (területek, köbtartalmak) összege. A mértéket bonyolultabb ponthalmazokra is ki tudjuk terjeszteni az additivitás megtartásával. A hosszúságból, területből, köbtartalomból ilyen értelemben nyert mértéket mai szóhasználattal Lebesgue-mértéknek nevezzük. Nos, az euklideszi geometriában értelmezhetők olyan, az additivitás tulajdonságával rendelkező mértékek, melyek különböznek a Lebesgue-mértéktől. Lambert felfedezte, miszerint a hegyesszög hipotézise (melyet úgy is megfogalmazhatunk, hogy a háromszög szögeinek összege kisebb, mint két derékszög) esetén a geometriai mérőszámok nem választhatók meg tetszőlegesen, hanem azok – eltekintve egy univerzális pozitív szorzótól – egyértelműen adottak. Lambert közölt is erre egy elnagyolt bizonyítást.

Felfedezte továbbá, hogy a hegyesszög hipotézise esetén a háromszög területét a gömbháromszögtan egyik formulájából pusztán formális manipulációval megkaphatjuk. Ha egy gömbháromszög szögei α, β, γ, akkor a gömbháromszög területe r^2 $(\alpha+\beta+\gamma-\pi)$, ahol r a gömb sugara. Az r sugár helyébe ir-et helyettesítve (ahol i az imaginárius egység) az előbbi formula átalakul az $r^2(\pi-\alpha-\beta-\gamma)$ formulává. Ha egy háromszöget kirakunk kisebb háromszögekből, akkor a nagy háromszögre vonatkoztatott előbbi formula egyenlő lesz a kis háromszögekre vonatkoztatott megfelelő formulák összegével. A mérték egyértelműsége miatt a fenti képlet megadja a háromszög területét a hiperbolikus geometriában (mai szóhasználattal élve), egy univerzális pozitív szorzótól eltekintve. A mérték ezután kiterjeszthető olyan halmazokra is, melyek háromszögek egyesítéseként adódnak. A fenti gondolatmenet világosabb kifejtése annak, ami Lambertnél olvasható. Lambert tulajdonképpen még az r^2 $(\pi-\alpha-\beta-\gamma)$ formulát sem írta fel. Másfelől a fenti eredményt abszurdnak tartotta, mert képzetes sugarú kör a geometriában nem létezik, és úgy vélte, hogy a hegyesszög-hipotézis abszurd következményei az V. posztulátum bizonyítását jelentik.

Legendre (1752–1833) egyik fő érdeme, hogy egy kitűnő geometriai tankönyvet írt, ez volt az első komoly riválisa az Elemeknek kétezer év óta. Tárgyunk szempontjából azonban azt kell megemlítenünk, hogy Legendre is felfedezte azt a tételt, amit Saccherivel kapcsolatban említettünk, így az a Saccheri–Legendre-tétel nevet viseli.

Bolyai Farkas (1775–1856) fiatalkorában intenzíven kísérletezett az V. posztulátum bizonyításával. Fő műve a Tentamen, melyben összefoglalta azokat a hipotéziseket, amelyeket az V. posztulátummal egyenértékűnek talált. Ezek közül az alábbi kettő a legérdekesebb.

– Négy pont, melyek nincsenek egy síkon, egy gömbön vannak.

– Három pont, melyek nincsenek egy egyenesen, egy körön vannak.

Ha a kettő közül akármelyik levezethető, akkor az V. posztulátum is levezethető.

Az előfutárok második csoportjában elsőként a marburgi jogászprofesszor, Schweikart (1780–1859) munkáját említjük. Egy marburgi matematikus, Gerling, közvetítésével

1818-ban elküldött Gaussnak egy rövid kéziratot, melyben a legfontosabb az, hogy egy az euklideszitől különböző „asztrál geometriát” lehetségesnek tart. Gauss a következő évben írt válasza ebben az esetben sem volt kedvező. Válaszában Gauss megemlíti (bizonyítás nélkül), hogy az asztrál geometriában, amikor adott egyeneshez egy rajta kívül fekvő ponton át egynél több párhuzamos egyenes húzható, a háromszögek területének felső határa

πC^2 / [log=(1+√2)]^2 ,

ahol *C* univerzális állandó. Mai tudásunk szerint ez a felső határ akkor éretik el, amikor a három oldal mindegyik párja egymáshoz képest aszimptotikus (elpattanó, magyarázatát ld. később). Nem világos Gaussnál az, hogy képletében log helyett log.hyp. szerepel.

Taurinus (1794–1874) megtalálta az összefüggést a *C* és a háromszög területében szereplő *k* állandó között:

k= C/log (1+√2)

Ezt 1826-ban megjelent könyvében publikálta. Taurinus elég messzire eljutott, többek között trigonometriai formulákat is levezetett a hegyesszög hipotézise esetére. Mindamellett az új geometriát nem fogadta el a fizikai értelemben vett tér lehetséges geometriájaként.

Kicsit részletesebben foglalkozunk Gauss idevágó munkásságával. Gauss semmit sem publikált a nemeuklideszi geometriáról. Eredményeit hagyatékából és a másokhoz intézett leveleiből lehet rekonstruálni. E téren nagyrészt Szénássy Barna (1977/1980) alapvető cikkére támaszkodunk.

Mindenekelőtt érdemes felfigyelnünk arra a jelenségre, hogy a XIX. század második felében Bolyai személye (igazságtalanul) háttérbe szorult Lobacsevszkijéhez képest. A XX. század elejére a kép kezdett tisztulni, legalábbis az európai kontinensen. Újabban azonban, a Gauss születésének 200. évfordulója alkalmából rendezett konferencia és az ebből az alkalomból megírt sok tanulmány hatására, Bolyai és Lobacsevszkij is Gausshoz képest gyakran háttérbe szorul. Sokan Gausst tartják a nemeuklideszi geometria igazi felfedezőjének.

Gauss, akit a matematikusok fejedelmének neveznek, valóban óriás az óriások között is. Nemcsak matematikus, hanem csillagász, fizikus és geodéta is volt. Munkássága a tiszta elmélet és az alkalmazás terén egyaránt alapvető. Összegyűjtött művei tizenkét hatalmas kötetet töltenek meg. Sartorius von Waltershausen, Gauss első életírója azonban megállapította, hogy Gausst különösebben nem érdekelte olyan geometria kidolgozása, mely az euklideszitől különböző. Más vélemény szerint is a három *a* betűs tudomány: az aritmetika, az analízis és az algebra érdekelte elsősorban.

Gauss hagyatékában 25–26 olyan helyet találunk, ahol a geometria alapjairól, illetve a nemeuklideszi geometriáról van szó, ám feljegyzései összesen 10–12 oldalt töltenének meg. Ezen kívül az 1796. március 30-tól 1814. július 9-ig vezetett naplójában találunk egy bejegyzést, amely egy mondatból áll: „A geometria alapjaiban kitűnő előrehaladást értünk el. Braunschweig, Sept. 1799”.

Gauss feljegyzései arról tanúskodnak, hogy alaposan ismerte Lambert (1786) könyvét. Ma már azt is tudjuk, hogy ezt 1795-ben, göttingeni tanulmányai első évében és 1797-ben is kikölcsönözte az egyetem könyvtárából (Dunnington, 1955). Gauss megfogalmazta a párhuzamos egyenesek fogalmát, mely kétségtelenül hasonló a Bolyai- és a Lobacsevszkij-féle párhuzamossághoz. Az 1819-ben Gerlinghez (valójában Schweikarthoz) írt válaszában bizonyítás nélkül megadta a hiperbolikus geometriai háromszög területének a felső határát (ezt már említettük). Az 1831. július 12-én Schumacherhez írott levelében közli a hiperbolikus geometriai kör kerületét, de nem bizonyítja, hanem egyszerűen nyeri az *r* sugarú gömbi kör kerületének a formulájából *r* helyébe *ir*-et helyettesítve. Az 1832. február 14-én (az Appendixre reagáló) Bolyai Farkashoz intézett levelében levezeti a hiperbolikus geometria háromszögének területi képletét. Ez Gauss legterjedelmesebb írása a nemeuklideszi geometriáról, ám bizonyítása nem teljes, mert felhasználja azt, hogy a háromszög maximális területe véges. Végül, 1840–1846 között megjegyzéseket fűz Lobacsevszkij (1840) könyvéhez. Ezek értékes észrevételek, de támaszkodnak az Appendix egyes összefüggéseire.

Az Appendix (először különlenyomatként jelent meg 1831 áprilisában) előtti időből tehát kevés eredményt lehet Gaussnak tulajdonítani, legalábbis dokumentálható módon.

Érdemes viszont felfigyelni arra, hogy Gauss ismerte Lambert könyvét. Bolyai János egyik írásából (l. Stäckel, 1914, 221–223. old.) viszont tudjuk, hogy mely matematikusok írásait ismerte ő a párhuzamosok elméletének köréből, és Lambert nincs közöttük. Eszerint vagy Gauss nem tett említést Bolyai Farkasnak Lambert könyvének létezéséről, vagy az apa nem mondta ezt el fiának. Az utóbbi esetet, Bolyai Farkas jellemét, fia iránt érzett apai szeretetét ismerve, kizárhatjuk. Akkor viszont arra következtethetünk, hogy Gauss egyáltalán nem volt közlékeny Bolyai Farkas irányában a párhuzamosok kérdését illetően. Ez azért fontos, mert több régebbi szerző állítja, hogy Bolyai János azt publikálta, amit apja Gausstól hallott. Ennek cáfolására egyéb érvek egész sora is felvonultatható. (l. Szénássy említett cikkének további részleteit és Császár (1978) cikkét).

Bolyai János forradalma

Húsz évvel ezelőtt a híres princetoni matematikus, John Milnor tollából megjelent egy cikk „Hyperbolic geometry: the first 150 years” címmel. Ebben azt írja, hogy a nemeuklideszi geometria az első negyven évében bizonytalan állapotban volt. Később integrálódott a matematika tekintélyesebb ágaiba, Gaussnak a görbült felületekre és Riemannak a magasabb dimenziós görbült sokaságokra adott elmélete révén. Bár van igazság abban, amit Milnor ír, a valóság ennél sokkal bonyolultabb.

A felületek és a magasabb dimenziós sokaságok görbületének és geometriájának az elmélete nem vezetett ki a matematikából, legalábbis nem lényegesen. A felületek görbületének értelmezése és tulajdonságainak vizsgálata minden további nélkül elhelyezhető volt a matematika meglévő rendszerébe. Riemann görbült sokaságaival, illetve geometriájával más a helyzet. Ebben az elméletben a geometria egy általános szemléletmódja jelent meg, ámde negyedszázaddal Bolyai és Lobacsevszkij felfedezése után. Riemann ezt az elméletet magántanári habilitációs előadásában ismertette 1854-ben. Ekkorára már kezdett világossá válni az, ami Bolyai és Lobacsevszkij publikációi idejében még nem volt az, hogy a geometria és a valóság lehet különböző, hogy a geometria felfogható az absztrakt elméletek egy osztályának, nem mondva le az alkalmazás igényéről, mert önkényesen is értelmezhető struktúrái ugyanolyan módon vizsgálhatók, mint pl. a függvények, vagy más matematikai objektumok. A mű egyébként Riemann halála után, 1868-ban jelent meg nyomtatásban.

Bolyai Jánosig a geometria a körülöttünk lévő valóságot írta le, attól elválaszthatatlan volt. Pont, egyenes, sík az volt, amit a szemléletünk nagy erővel ránk kényszerít. Ne feledjük, Eukleidész axiómái csak a rend kedvéért születtek, hogy a fogalmak, állítások zűrzavarában el tudjunk igazodni és tisztázzuk, mi az, ami nyilvánvaló és mi az, ami bizonyításra szorul. A nyilvánvaló állítások, axiómák pedig a lehető legkevesebben legyenek, ne tekintsünk axiómának olyan állítást, mely a többiből levezethető.

Bolyai János felfedezése előtt a matematikusok azt várták, hogy jön egy zseni, aki ragyogó bizonyítást ad az V. posztulátumra, a többi axiómára támaszkova. Hiszen még a közvetlen elődök, Saccheri és Lambert is csak azért tételezték fel az V. posztulátum nem igaz voltát, hogy indirekt bizonyítást alkalmazva ellentmondásra jussanak. A világ ugyanis euklideszi. Ezt nem így mondták, de így gondolták. A kor legnagyobb filozófusától, Immanuel Kanttól kezdve az utca emberéig ez volt a meggyőződés. Ma már tudjuk, hogy a relativitáselmélet mást tanít és kísérleti bizonyítékok is szólnak mellette, de ezt is csak a műveltebbek tudják. Napi életünk, tevékenységünk az euklideszi geometriára támaszkodik. A gyerek, amikor füzetét megvonalazza, a földmérő, amikor kiméri telkünket, nem kell, hogy azzal törődjön, vajon húzható-e több párhuzamos adott egyeneshez egy rajta kívül fekvő ponton át.

Bolyai a geometriát az absztrakt elméletek világába küldte. Megmutatta, hogy logikailag egynél több geometria is lehetséges. Ahogy 1823. november 3-án Temesvárról apjának írta: „a semmiből egy ujj más világot teremtettem”. Egy elgondolt világot, természetesen.

Ámde ha a világ az euklideszi geometriát követi, akkor mire jó ez az egész? Gauss nem merte közzétenni eredményeit a nemeuklidészi geometriával kapcsolatban, melyek részeredmények voltak Bolyai eredményeihez képest, de ezeket sem merte, nehogy azt gondolják, hogy meghibbant. Bolyai azonban forradalmár volt, bátran kiállt tudományos meggyőződése mellett. Az objektivitás azonban megkívánja, hogy megemlítsük, Bolyai arra számított, hogy meg fogják őt érteni, és a műve alapján elnyeri a megérdemelt elismerést.

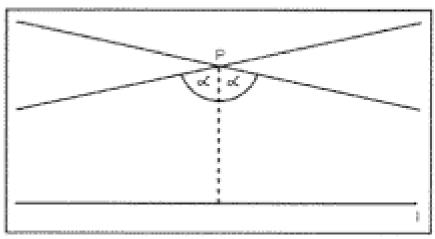
Az 1823. november 3-i levél után Bolyai német nyelven leírta eredményeit és a dolgozatot 1826-ban odaadta egykori bécsi tanárának, akkori aradi elöljárójának Johann Wolter von Eckwehrnek. A kézirat azonban elveszett. Apja buzdítására művét latinul is megírta, mely azután Bolyai Farkas Tentamen című kétkötetes monumentális műve első kötete Appendixeként jelent meg. Teljes címe: *Appendix, Scientiam Spatii absolute veram exhibens; a veritate aut falsitate Axiomatis XI. Euclidei (a priori haud unquam decidenda) independentem; adjecta ad casum falsitatis, quadratura circuli geometrica*. Magyarul: Appendix, A tér abszolút igaz tudománya; a XI. Eukleidész-féle axióma (a priori soha el nem dönthető) helyes, vagy téves voltától független tárgyalásban; annak téves volta esetére a kör geometriai négyszögesítésével.

Bolyai János nem kísérletezett azzal, hogy művét a kor vezető matematikai folyóiratai valamelyikében publikálja. Ehhez ugyan apjának Gauss segítségével meglett volna a kapcsolata, de a gondolat nem merült fel. Talán János szerencséjére, mert, mint tudjuk, Gauss az 1832-ben neki megküldött Appendixszel kapcsolatban levelet írt Farkasnak, mely Jánosra lesújtó hatással volt. Az Appendixben foglalt eredményekről ugyan elismeréssel nyilatkozott, de azt is írta, hogy ezekre már ő is rájött. A levélből már idéztünk.

Az Appendix sok magyar és idegen nyelvű kiadásban megjelent. Angolra a texasi George Bruce Halsted fordította 1891-ben, mely a fordító előszavával Bonola eredetileg olasz nyelven írt könyvének angol fordításában (1911) is megjelent. Az Appendix eredeti változata huszonnégy oldalas mű. Erről Halsted professzor előszavában azt írja, hogy „ez a huszonnégy oldal a legrendkívülibb két tucat oldal a gondolkodás történetében”. Nos, ne csak dicsérjük Bolyai Jánost, hanem ismerkedjünk is meg az Appendix néhány jellegzetes eredményével.

Említettük, hogy Bolyai még Eukleidész axiómarendszerén belül gondolkodott, a teljesebb, Hilbert-féle axiómarendszer csak 1899-ben látott napvilágot. Ami azonban Bolyainak az Appendixben alkalmazott levezetéseit és általában módszertanát illeti, e tekintetben felhasználta az elmúlt századok nagy újításait, mindenekelőtt Descartes analitikus geometriáját, továbbá Newton és Leibniz differenciál- és integrálszámítását. Az előbbi, bizonyos értelemben, az egzaktság egy új, magasabb szintjét is jelentette, nem csupán azt, hogy algebrai eszközökkel is lehetségessé vált geometriai problémák megoldása, amint azt Bos (2001) meggyőzően kifejti.

Bolyai először, elvetve az V. posztulátumot (mely nála a XI. axióma nevet viseli), értelmezi a párhuzamosságot. Tekintsünk egy *l* egyenest és egy rajta kívül fekvő *P* pontot. Ha a *P* pontból kiindulva egy félegyenest húzunk, mely metszi az *l* egyenest az egyik irányban, majd a metszéspontot fokozatosan kitoljuk a végtelenbe, akkor lesz egy olyan határeset, amikor a félegyenes már nem metszi *l*-et **(1. ábra)**. Ugyanezt a másik irányba menve is megtehetjük. A határhelyzetű félegyeneseket hosszabbítsuk meg a másik irányba is, kapunk két olyan egyenest, melyek párhuzamosak *l*-lel.



1. ábra. Elpattanó egyenesek

Ezen a ponton megjegyezzük, hogy Bolyai egyenesei nem feltétlenül „egyenesek” aköznapi értelemben, a szemléltető ábrákon mégis köznapi értelemben vett egyeneseket rajzolunk. Később látni fogjuk, hogy a Bolyai–Lobacsevszkij-geometria „egyenesei” félkörök, vagy más geometriai objektumok is lehetnek.

Bolyai kiépítette a sík és a tér abszolút, V. posztulátumtól független geometriáját. Az alábbi tétel az abszolút síkgeometria körébe tartozik. Ha a *P* pont az *l* egyenestől *d* távolságra van, és a *P* pontból az *l* egyenesre bocsátott merőleges és a határhelyzetű párhuzamos által bezárt szög α, akkor érvényes Bolyai formulája:

$$\operatorname{ctg}\frac{\alpha}{2} = e^{\frac{d}{k}}$$

Az ebben a formulában szereplő *k* állandó univerzális, független attól, hogy mely *l* egyenest és *P* pontot vesszük. Ugyanez a *k* fordul elő más geometriai mérőszámok képletében is Bolyai geometriájában.

Bolyai János egyik legszebb, az abszolút geometriában érvényes tétele az alábbi. Egy háromszög szögeinek szinuszai úgy aránylanak egymáshoz, mint azoknak a köröknek a kerületei, amelyeknek sugarai rendre megegyeznek a szemben lévő oldalakkal. Ha a szögeket *A, B, C*, a szemben lévő oldalakat *a, b, c*, az *r* sugarú kör kerületét O*r* jelöli, akkor tehát Bolyai tétele a

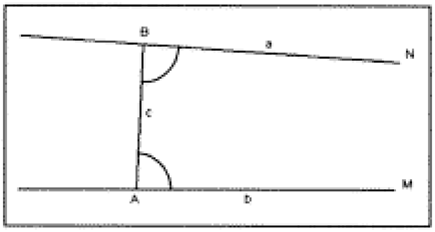
$\mathrm{O}a:\mathrm{O}b:\mathrm{O}c=\sin A:\sin B:\sin C$ formulával fejezhető ki.

Az euklideszi geometriában $\mathrm{O}r=2\pi r$, a fenti formula tehát az ismert $a:b:c=\sin A:\sin B:\sin C$ alakot ölti. A hiperbolikus geometria esetében viszont $\mathrm{O}r=2\pi k\ \mathrm{sh}\,(r/k)$, amiből következik, hogy

$\mathrm{sh}\,(a/k) : \mathrm{sh}\,(b/k) : \mathrm{sh}\,(c/k) = \sin A:\sin B:\sin C$

Tekintsünk most két párhuzamos egyenest: *a, b,* és vegyünk fel mindegyiken egy pontot: *A, B.* Az egyeneseknek iránya is van, amint korábban említettük, ezeket jelöljék *M*, *N* (**2. ábra).** Tételezzük fel, hogy az *MAB* szög egyenlő az *NBA* szöggel. Ekkor az *A* és *B* pontokat izogonális korreszpondáló vagy röviden korreszpondáló pontoknak nevezzük (ez Gauss elnevezése) és a tényt az $A \bumpeq B$ relációval juttatjuk kifejezésre (Bolyai János jelölése). Ez a reláció független az V. posztulátumtól, az abszolút geometria körébe tartozik és rendelkezik a reflexív, szimmetrikus és tranzitív tulajdonságokkal:

$A \bumpeq A$; ha $A \bumpeq B$, akkor $B \bumpeq A$; ha $A \bumpeq B$ és $B \bumpeq C$, akkor $A \bumpeq C$.



2. ábra. Korrespondáló pontok

Ha egy reláció rendelkezik a fenti tulajdonságokkal, akkor azt ekvivalencia relációnak nevezzük. Ismeretes, hogy egy tetszőleges halmazon belül egy az elemekre vonatkozó ekvivalencia reláció megvalósít egy páronként közös elem nélküli részhalmazokra történő felosztást. Ezeket ekvivalencia osztályoknak nevezzük.

Mármost az izogonális korreszpondencia reláció által létesített mindegyik ekvivalencia osztály egy síkbeli ponthalmaz, melyen belül – amint Bolyai ezt kimutatja – az euklideszi geometria érvényes. Ezeket horociklusoknak nevezzük.

Hasonlóan értelmezhető a paraszféra fogalma. A paraszférán belül szintén az euklideszi geometria érvényes.

A paraciklus, horoszféra a végtelen sugarú körnek, ill. gömbnek tekinthető.

Ha egy háromszög szögei α, β, γ, akkor az euklideszi geometriában $\alpha+\beta+\gamma=\pi$, a hiperbolikus geometriában azonban $\alpha+\beta+\gamma<\pi$. A két szám $\pi-(\alpha+\beta+\gamma)$ különbségét a háromszög defektusának nevezzük. Bolyai egyik legszebb tétele azt mondja ki, hogy a háromszög Δ területe egyenlő az alábbi mennyiséggel: $\Delta=k^2(\pi-(\alpha+\beta+\gamma))$, ahol *k* a korábbról ismert univerzális állandó. Ezt a formulát Lambert is ismerte, Bolyai viszont szabatosan be is bizonyította.

A hiperbolikus geometriában egy derékszögű háromszög *a*, *b* befogóira és *c* átfogójára (a szög az „egyenesek” metszéspontjában található szöget jelenti) érvényes az alábbi formula: $\mathrm{ch}\,(c/k) = \mathrm{ch}\,(a/k)\,\mathrm{ch}\,(b/k)$

Ha $k \to \infty$, akkor határesetként a $c^2=a^2+b^2$ formulát kapjuk, ami Pitagorasz tételét jelenti.

Bolyai Farkas a Tentamenben néhány oldalon megjegyzéseket fűzött az Appendixhez. Ezek között megadja a részletes levezetést a fenti határérték-relációra. (Egy érdekes Pitagorasz-tételt közöl Ungar (1999) a hiperbolikus geometria körlemez modelljére vonatkozólag, mely azonban lényegesen eltér a fenti képlettől.)

Végül megemlítjük, hogy Bolyai az Appendixben foglalkozik a hiperbolikus geometrián belüli szerkesztésekkel is.

Bolyai János egyéb matematikai munkásságáról Stäckel Pál (1914), Szász Pál (1973), Kárteszi Ferenc (1977), Weszely Tibor (1981) és Kiss Elemér (1999) ad jó áttekintést. Hatásáról a geometria és a matematika fejlődésére Varga Ottó (1953) és Rapcsák András (1953) cikkei tartalmaznak fontos információt. Milnor (1982) említett cikke az utolsó összefoglaló mű a hiperbolikus geometria terén elért eredményekről. Bolyai János nem matematikai jellegű írásainak kiadása és értékelése folyamatban van.

A nemeuklideszi geometria másik nagy felfedezője az orosz Lobacsevszkij (1793–1856). Bolyai és Lobacsevszkij munkája között a különbség röviden úgy fogalmazható meg, hogy Bolyai kiépítette az abszolút geometriát is, Lobacsevszkij viszont részletesebben dolgozta ki a hiperbolikus trigonometriát. Nem sok értelme van a kettejük közötti prioritási vitának. Hogy mégis lássunk valamit e tekintetben, megemlítjük a következőket.

Lobacsevszkij első, a nemeuklideszi geometriáról szóló publikációi 1829–1830-ban jelentek meg orosz nyelven a Kazanyi Hírmondóban. Bolyai Appendixe különnyomatként 1831-ben jelent, meg, az egész Tentamen imprimatúrájának éve azonban 1829. Bolyairól tudjuk, hogy 1823-ban már nagy vonalakban felépítette geometriáját és 1826-ban művének német nyelvű változata el is készült. Minthogy az utóbbi elveszett, az előbbi pedig csak levélbeli bejelentése a felfedezésnek, nem állnak rendelkezésre az Appendix megjelenéséhez képest korábbi keletű dokumentumok Bolyai felfedezését illetően. Másfelől Lobacsevszkijjel kapcsolatban is lehet hivatkozni arra, hogy 1826-ban tartott egy témába vágó előadást a kazanyi egyetemen. Ha viszont ennek címét tüzetesen megnézzük, akkor láthatjuk, hogy az előadó ekkor még az V. posztulátumot szándékozik bizonyítani (Kiss Elemér, 1999).

Több szerző szerint a Bolyai–Lobacsevszkij-féle geometria a kantiánus térszemlélet bírálatát, egyesek szerint cáfolatát is eredményezte. Azzal érvelnek, hogy ha tudatunkban megfér egymással az euklideszi és a hiperbolikus geometria egyaránt, akkor nem lehetséges az, hogy a térről alkotott fogalmunk a priori bennünk legyen, az objektumokról szerzett tapasztalattól függetlenül.

Az kétségtelen, hogy az euklideszi geometria abszolutizálása a kantiánus filozófiában vakvágánynak bizonyult, nem annyira a Bolyai–Lobacsevszkij-féle geometria, hanem a XX. századi fizikai eredmények miatt. Kantnak az a nézete azonban, hogy a tér euklideszi, különválasztható a térre vonatkozó egyéb nézeteitől, amelyek árnyaltabbak és különbözők attól, ami a fent említett ellenvetésben olvasható. Kant nem tagadta azt, hogy a térre vonatkozólag egynél több absztrakt matematikai elmélet is megfogalmazható.

Mindamellett Gauss, Bolyai és Lobacsevszkij korában a kantiánus filozófia az euklideszi geometria szilárd támogatójának számított. Ha Gauss félt a böociaiak támadásától (akiket az athéniek élvhajhász, buta embereknek tartottak), hogy eredményeit közzétegye, nem félt ettől sem Bolyai, sem Lobacsevszkij. Mindketten forradalmárok voltak, tudományos meggyőződésüket bátran tárták a világ elé.

Harmadik rész

A Bolyai–Lobacsevszkij-geometria fogadtatása és utóélete

Lobacsevszkij közleményeit a szakmai és a nem szakmai közvélemény egyaránt érdektelenséggel fogadta. Bolyainál nem ez volt a helyzet, ő még letaglózást is kapott hozzá, Gausstól. Ám másoknak azért lehetett pozitív véleménye Bolyai művéről. Talán a leghivatottabb testület, a Magyar Tudós Társaság Mathematikai Osztálya kifejezte valamiképpen elismerését? Vállas Antal akadémikus 1836-ban összefoglaló cikket írt a hazai matematika addigi eredményeiről. Hosszasan panaszkodik, hogy nehéz sorsunk volt; tatár, török stb., ezért nem tudtunk eléggé fejlődni. Bolyaival kapcsolatban idézi a Tentamen, Az arithmetica eleje és Az arithmeticának, geometriának és physikának eleje című műveket. A szövegben csak annyit ír, hogy „Bolyai különcségével tűnik ki”. A művek felsorolásából látjuk, hogy Farkasról, nem pedig Jánosról van szó. Ámde a Tentamen címében benne van, hogy „Cum Appendice Triplici”, tehát valamiképpen mégis szerepel János műve is a felsorolásban? Sajnos, ez sem áll. Az említett három függelék a második kötethez tartozik, vagyis a teljes könyv végén van. A Tentamenhez készített magyar nyelvű prospektus tájékoztatta a vásárlókat arról, hogy a jelzett három függelék hol található. E szerint Bolyai János művét Vállas Antal összefoglaló cikke nem említi, az irodalomjegyzékben sem szerepel. Azt, hogy az összefoglaló cikk szerzője nem értette meg Bolyai János alkotásának lényegét és jelentőségét, még el lehet fogadni. Azt azonban már nem, hogy említést sem tesz róla. Pedig Bolyai Farkas a Tentament 1832-ben megküldte a Magyar Tudós Társaságnak, és az ott porosodott a könyvtár polcain.

Alexits (1977) említi, hogy a Magyar Tudós Társaság Mathematikai Osztálya 1844-ben pályadíjként kitűzte a paralelák problémáját. Ez azonban nem felel meg a valóságnak. Az 1844. évi „jutalomtétel”, melyet az 1844. december 26-ai nagygyűlésen elfogadtak, a következő: „Mik a képzetes mennyiségek tulajdonságai, s mind analyticai, mind mértani értelmök?” Jóllehet erre vonatkozólag is volt Bolyai Jánosnak, sőt Farkasnak is munkája, ezt egyikük sem publikálta, csupán megküldte a lipcsei Jablonowski Társaságnak, ugyancsak pályadíj elnyerése céljából. A Tudós Társaság matematikusai e tekintetben tehát nem hibáztathatók. Ács Tibor (1998) cikkében részletesen beszámol e pályadíj keletkezésének történetéről. Ebben az időben a hadtudomány a matematikai osztályon belül volt, és Kiss Károly százados, az osztály hadtudománnyal foglalkozó tagja szerette volna, ha 1844-ben hadtudományi pályadíjat tűznek ki. Javaslatának szövegében egy északról érkező támadás esetére vonatkozó védelmi terv kidolgozása szerepel. Ezzel akarta elérni azt, hogy a hadtudomány az akadémiai osztályon belül megbecsültebbé váljék. Törekvése azonban sikertelen maradt és végül az említett pályadíjat tűzték ki.

A hivatalosak tehát nem érdeklődtek Bolyai János műve után, de mások se nagyon. Idézzünk Bolyai Farkas 1836. október 3-án kelt, Gausshoz intézett leveléből: „Itt senkinek sem kell a Matematika; tanítványaim közül csak kevésnek van igazi érzéke hozzá, művemet makulatúrának, csomagolásra és hasonlókra használom, kiváltképp hasznomra volt az itt nemrégiben dühöngő kolera idején, amiben én is szenvedtem egy hónapig, de hányás és görcs nélkül, csak szerfelett levert voltam, undorodtam az ételtől és bortól, kínzó szomjúság gyötört friss vízre és nagy diarrhoe-m volt, most is hasmenésem van". (Bolyai-levelek, 1975., 188. old.)

Bolyai János műve felfedezésének története külföldön kezdődött. Ebben nagy szerepet játszott Gauss 1855-ben bekövetkezett halála után hagyatékának a feldolgozása. Megtalálták Bolyai, Lobacsevszkij műveit, Gauss másokhoz, és mások Gausshoz intézett leveleit. A hagyatékot Sartorius von Waltershausen göttingeni professzor rendezte, akinek Bolyai Farkas is megküldte Gaussnak hozzá intézett leveleit, így azok is a hagyatékba kerültek. Lassan bontakozni kezdett a kép.

Az első, nyomtatásban megjelent elismerő szavak a drezdai matematikaprofesszortól, Baltzertől származtak, ezeket az 1866–67-ben megjelent Elemente der Mathematik című, jól ismert és befolyásos könyvében írta le. Ezt követően Hoüel bordeaux-i professzor kiadott egy brosúrát „Essai critique sur les principes fondamentaux de la Géometrie élémentaire" címmel, melyben kivonatokat közölt az Appendixből, „hogy biztosítsa ezeknek az új gondolatoknak az elismerését, melyet azok megérdemelnek". Az utóbbi idézet Schmidt Ferenc budapesti építésztől származik, aki 1868-ban cikket írt a két Bolyai életéről. Az övé volt az első magyarországi reagálás, közel negyven évvel a Tentamen és az Appendix megjelenése után. Hoüel 1867-ben az Appendix teljes francia nyelvű fordítását is kiadta, mellékelve hozzá Schmidt Ferencnek a Bolyaiakról írt életrajzát. Így került Höuel könyvébe a fenti idézet.

Az 1868-as év meghozta az érdeklődést mások részéről is. Ebben az évben jelent meg az olasz Beltrami cikke, melyben modellt adott a Bolyai–Lobacsevszkij-geometria számára. A két pionír ugyanis nyitva hagyta axiómarendszere ellentmondás-mentességének kérdését. Ezt a kérdést oly módon lehet megválaszolni, hogy az axiómákban nem értelmezett fogalmakat (pont, egyenes, sík) konkrét tartalommal töltjük meg, modellt adunk az új geometria számára. Ha legalább egy modell létezik, akkor az axiómák ellentmondásmentesek, van értelme a dolognak. A modell, ahogyan a nemeuklideszi geometria történetét tárgyaló szerzők ironikusan megjegyzik, az euklideszi geometrián belül helyezkedik el.

Riemann 1854-ben fektette le geometriájának alapjait. Riemann, aki Gauss tanítványa volt Göttingenben, geometriáját a Gauss által korábban kidolgozott felületelméletre alapozta. A Riemann-geometria megértése és elismerése nem okozott gondot a német és a nemzetközi matematikai életben. Beltrami, aki a Bolyai–Lobacsevszkij-geometriát a Riemann-geometria keretei között helyezte el, ezáltal is nagyban hozzájárult a hiperbolikus geometria útjának egyengetéséhez. Innentől már fel is fokozódott az érdeklődés. A kor nagy matematikusai, Poincaré, Klein, Fuchs és mások publikáltak új modelleket, további eredményeket. Ennek kapcsán új matematikai tudományok is születtek. Sajnos azonban inkább csak Lobacsevszkijre hivatkoztak, Bolyai nemzetközi elismertetése későbbre maradt.

Ezen a ponton tesszük fel a kérdést: széles körben megértették-e a tudomány képviselői – elsősorban a matematikusok, legalább évtizedekkel a felfedezés után –

Bolyai és Lobacsevszkij művének igazi jelentőségét? Cayley (1821–1895), aki egy időben a British Association elnöke volt, 1883 szeptemberében tartott elnöki beszédében így nyilatkozott: „Jól ismert, hogy Eukleidész tizenkettedik axiómáját Playfair formájában is bizonyításra szorulónak tekintették; és hogy Lobacsevszkij egy olyan tökéletesen konzisztens elméletet konstruált, nem euklideszi síkgeometriát, melyben ez az axióma érvénytelennek van feltételezve. Van egy hasonló nemeuklideszi szilárd (solid) geometriai rendszer is. Az én nézetem az, hogy Eukleidész axiómájának Playfair formája nem igényel bizonyítást, hanem az része a térfogalmunk fizikai terének – a térnek, mellyel tapasztalat útján ismerkedünk meg és mely alapvetően a külső tapasztalat reprezentációja.”

Cayley az Elemek olyan kiadását ismerte, melyben az V. posztulátum tizenkettedik axiómaként szerepel. Playfair axiómája, mint említettük, az V. posztulátummal egyenértékű. Cayley idézetében érezhető Kant hatása. A lényeg azonban az, hogy a nemeuklideszi geometriának szerinte semmi értelme, hiszen a világ euklideszi.

Gauss 1855-ben bekövetkezett haláláig a tudományos világ Lobacsevszkij munkáját sem méltatta figyelemre. Pedig ő 1840-ben német nyelven is közzétette eredményeit, és az ő irányába Gauss nem fukarkodott az elismeréssel, bár ezt csak levélben tette meg, nyomtatott írásban nem. Mindamellett más módon kifejezte nagyrabecsülését, Lobacsevszkijt 1842-ben megválasztatta a Göttingeni Királyi Társaság külföldi levelező tagjává. Otthon, Oroszországban azonban forradalmi elmélete miatt félreállították. Karrierje ígéretesen kezdődött, fiatalon, huszonhárom éves korában professzor lett a kazányi egyetemen, tizenegy évvel később, 1827-ben pedig ugyanott rektor is lett. Egyetemének fejlesztésén sokat fáradozott, igen eredményesen. Az 1830-ban kitört kolerajárvány idején sikerrel védte meg az egyetem tanárait, családjukat és a hallgatóságot a járványtól, közöttük csak 2,5 százalékos volt a halálesetek száma. Mindezek ellenére 1846-ban, ötvennégy éves korában, minden magyarázat nélkül felmentették a rektori megbízatása, sőt a professzori állása alól is. Talán Bolyai is hasonló sorsra jutott volna, ha sikerül hazájában tehetségéhez és tudományos eredményeihez méltó professzori állást kapnia? Lobacsevszkij életéről és munkásságáról Kárteszi Ferenc (1953) írt magyar nyelven cikket.

Cayley kantiánus szellemet tükröző idézete után lássuk, mit ír Riemann a geometriai térfogalomról. Az 1854-ben Göttingenben megtartott és 1868-ban publikált magántanári előadásában a következő áll: „Azt a feladatot tűztem magam elé, hogy megalkossam a többszörösen kiterjedt nagyságok elméletét, a nagyságok általános fogalmainak felhasználásával. Ebből következni fog, hogy egy többszörösen kiterjedt nagyság képes különböző metrikus relációk megvalósítására, következésképpen a tér csupán speciális esete a háromszorosan kiterjedt nagyságoknak. Ebből azonban szükségszerűen következik az, hogy a geometria állításai nem vezethetők le a nagyság általános fogalmaiból, és hogy azok a tulajdonságok, amelyek a teret megkülönböztetik más elképzelhető háromszorosan kiterjedt nagyságoktól, csakis tapasztalat útján igazolhatók.”

A tapasztalat szerepét a geometria és a valóság kapcsolatában még jobban hangsúlyozta Helmholz. A Berlinben, 1810-ben alapított Frigyes Vilmos Egyetem (a mai Humboldt Egyetem elődje) alapítási évfordulóján tartott beszédéből vettük az alábbi idézetet.

„Ha a geometriát a tapasztalati tényekre akarjuk alapozni, ahol annak értéke mindig a fizikai megfelelőség, csakis annak a tudománynak az állításait alkalmazhatjuk, amelyet én fizikai geometriának neveztem. Mindenki számára, aki az axiómákat a tapasztalatból következteti, mostanáig a mi geometriánk valóban fizikai geometria volt".

Kicsit odébb, Kantot bírálva, azt írja, hogy a geometria axiómáiban lefektetett állításokat a tényleges világ viszonyaira csak azt követően alkalmazhatjuk, ha azok érvényességét experimentálisan ellenőriztük és megállapítottuk.

Lobacsevszkij próbálkozott azzal, hogy csillagászati mérések révén bizonyítékokat szerezzen az új geometria mellett, de nem járt eredménnyel. Egy geometria érvényességét persze nem lehet kísérletileg igazolni, legfeljebb cáfolni. Elterjedt nézet (pl. Born, 1965), hogy Gauss három Hannover környéki hegycsúcs, a Brocken, a Hohen Hagen és az Inselberg háromszögének szögeit megmérve meg akarta tudni, hogy ezek összege *180°*, vagy kevesebb, és hogy az eredmény (a hibahatáron belül) az volt, hogy az összeg *180°*. E hegycsúcsok mindössze 107, 69, illetve 85 kilométer távolságra vannak egymástól, így nem lenne meglepő az eredmény. Szénássy Barna (1977/1980) azonban fényt derít arra, hogy Gauss nem csupán egy háromszöggel kapcsolatban végzett méréseket, hanem egész méréssorozatot végzett, de nem abból a célból, hogy eldöntse, a tér euklideszi, vagy nem. Gauss 1816-ban megbízást kapott a hannoveri kormánytól az ország feltérképezésére, amit 1841-ig el is végzett. Az említett háromszögből kiindulva egymás utáni háromszögeket konstruált, melyek háromszögelési pontrendszer gyanánt szolgáltak. A méréseket a legkisebb négyzetek módszerével kiegyenlítették, és így a másodpercek ezredrésze nagyságrendű pontossággal kapták meg az eredményeket. Gauss nyilván nem gondolhatta, hogy ilyen kis háromszög esetén a mérések kimutathatnak eltérést a *180°* szögösszegtől. Másfelől, a legkisebb négyzetek módszere (bár felfogható bármilyen geometriától független numerikus eljárás gyanánt) az euklideszi geometriával van igen jó összhangban, amit Gauss nyilván tudott, és nem valószínű, hogy ezt a módszert alkalmazta volna, ha célja a geometriák kísérleti ellenőrzése lett volna.

A legkisebb négyzetek módszerét Gauss egyik legjelentősebb tudományos eredményének tartotta, emiatt prioritási vitája is támadt a kor másik nagy matematikusával, Legendre-ral.

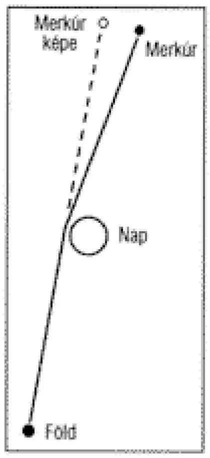
A fentiekhez még hozzátehetjük, hogy a legutóbbi, forgalomból már kivont 10 márkás bankjegyet Gauss emlékének szentelték. A bankjegy egyik oldalán Gauss képe van, mellette az ún. Gauss-görbe és Göttingen látképe, a másik oldalán pedig a szögek mérésére szolgáló szektáns, valamint a Gauss által megalkotott térkép vázlata látható.

Jóllehet Gauss célja más volt a méréseivel, azért megállapíthatta, hogy nem tapasztalt eltérést az euklideszi geometriától. Ezt ugyanis filozófusok bírálták, mondván, ha a mérés eredményeként eltérést tapasztaltak volna, ez akkor sem bizonyította volna az euklideszi geometria érvénytelenségét (mint ahogy a hibahatáron belüli egyezés sem bizonyította annak érvényességét), mert az eredmény lehet egy még ismeretlen fényelhajlás következménye.

A bírálók rátapintottak a lényegre. Einstein speciális relativitáselmélete 1905-ben, általános relativitáselmélete pedig 1916-ban látott napvilágot. Az utóbbi erősen támaszkodik a nemeuklideszi geometriára, annak Riemann által megfogalmazott változatára. Einstein elméletei azonban nem épülnek rá a tér ilyen vagy olyan geometriájára, hanem elvetik a tér és az idő különálló voltát és a „téridő" új fogalmából indulnak ki. Bár a relativitáselmélet is a tudomány forradalmát jelentette, felfedezőjének elismerést és világhírt hozott, nem pedig mellőzést. Ezt elsősorban azáltal sikerült elnyernie, hogy egy tapasztalati tény az elméletet fényesen igazolta.

Az általános relativitáselmélet a gravitációt a tér görbületével azonosítja, és ennek egyik megnyilvánulása, hogy nagy tömeg közelében a fény az euklideszi egyeneshez képest elhajlik. Hogyan lehet ezt kísérletileg igazolni, vetődött fel a kérdés, lehetőleg oly módon, hogy ne csak a jelenség általában igazolódjék be, hanem egyezés mutatkozzék a relativitáselmélet által számított és a tapasztalt értékek között?

A megoldást a Merkúr bolygó mozgásának a vizsgálata szolgáltatta. Csillagászok régóta észlelték, hogy a bolygó a várt helynél kissé odébb mutatkozik. Felvetődött, hogy a jelenség oka a fény euklideszi egyeneshez képest való gravitációs elhajlása. Ezt oly módon gondolták ellenőrizni, hogy megvizsgálták, lehet-e látni a Merkúrt egy olyan pillanatban, amikor a számítások szerint tudjuk, hogy az, hozzánk képest, a Nap mögött helyezkedik el **(1. ábra)**. Erre a vizsgálatra természetesen csak napfogyatkozáskor kerülhet sor.



1. ábra. A Merkúrról érkező fény elhajlása a Nap közelében

Eddington angol csillagász 1919-ben két expedíciót szervezett, az egyik Afrika nyugati partjainál, a másik Brazília északi részén végzett megfigyeléseket, május 29-én. E két helyen ekkor teljesültek a fent említett feltételek. Fényképfelvételeket készítettek, és azok kiértékelése után az Einstein elméletén alapult számítások fényesen beigazolódtak. A Merkúr sajátos pályája miatt ez volt az egyetlen, ezekre a kísérletekre és számításokra alkalmas bolygó.

Az első világháború befejezése után a társadalom ki volt éhezve a kultúrára, a magasabb rendű emberi értékeket képviselő tudományos ismeretekre. Einstein sikere mindent elsöprő volt, az újságok címlapjaira került a neve, ekkor lett világhírű.

Einstein relativitáselmélete óta sok egyéb fizikai elmélet született, mely fizikai terünkkel kapcsolatos. A legújabb szenzáció az, hogy bár „lokális méretekben" a térnek görbülete van, kozmikus méretekben azonban a tér mégis, a hibahatáron belül, euklideszinek mutatkozik!? Ez Szalay Sándornak, a Johns Hopkins Egyetem professzorának személyes közlése. Szalay és Gray (2001) beszámol arról, hogy az interneten hamarosan elkészül egy „virtuális obszervatórium", mely lehetővé teszi számítógép előtt ülve az égitestek megfigyelését. Az ennek kapcsán épülő adatbankban eddig elhelyezett adatok alapján jutottak erre a következtetésre. Erről részletes publikáció a 2002. évben várható.

Mikor szerzett tudomást Bolyai Jánosról és művének nagyságáról a hivatalos magyar tudomány? Kilenc évvel Bolyai János halála után, 1869-ben, báró Eötvös József, aki akkor a Magyar Tudományos Akadémia elnöke és kultuszminiszter is volt, levelet kapott Olaszországból. A levelet Baldassare Boncompagni herceg (1821–1894), tudománytörténész és annak mecénása írta. Közölte Eötvössel, hogy Bolyai János és Farkas életrajzát, valamint az Appendixet olasz nyelvre lefordították, külön postával küldik Eötvösnek, és hogy az Appendixben foglaltakat a római tudósok a XIX. század legnagyobb matematikai alkotásának tartják. Eötvös nem tudta, hogy örüljön, vagy piruljon, írta ezt követően fiának.

A levél megírásának hátterében Houël állt, aki ezen az úton próbálta elérni, hogy a Bolyaiakkal kapcsolatos tudakozódó leveleire Marosvásárhelyről választ kapjon. Houël meg volt döbbenve a magyarok nemtörődömsége miatt. Egyik levelében azt írja, hogy „fájdalommal látom, hogy Magyarország milyen kevésre értékeli saját tudományos érdemeit…”

Eötvös József átérezte a Bolyaiak ügyének fontosságát, és pártfogásába vette azt. A Bolyai-hagyatékot tartalmazó csomagot azonban az Akadémia már 1868-ban Pestre hozatta, miután Hunyady Jenő matematikus akadémikus már bejelentést tett a Bolyai János műve iránti külföldi érdeklődésről. A csomag letétetett az Akadémia Levéltárába. Negyedszázadig ott volt, egy bizottság próbálta az anyagban szunnyadó új tudományos eredményeket felfedezni, sikertelenül. Mindamellett Schmidt Ferenc ez idő alatt fedezte fel a papírok között Bolyai János 1823. november 3-i, apjához írt levelét (… semmiből egy ujj, más világot teremtettem). Később azonban, már Marosvásárhelyen, felfedezték a matematikai tartalmú kéziratok között az Appendix után írt művek egy részét. Ezek a következők: Responsio, a lipcsei Jablonowski Társasághoz benyújtott pályázat anyaga; Kiegészítések (az Appendixhez); A (hiperbolikus geometriában a) tetraéder köbösítése (köbtartalmának meghatározása); Ellentmondás-mentességi vizsgálatok; Észrevételek (Lobacsevszkij művével kapcsolatban); Raumlehre.

Benkő Samu kolozsvári történészprofesszor volt az, aki Abafáy Gusztávnak a segítségével a hátrahagyott Bolyai-kéziratokat rendszerezte. Tizenhat év munkájával sorba állította és dossziékban elhelyezte a tizennégyezer oldalnyi kéziratot. Ebben segítségére voltak Bolyai János „őrszavai”. Bolyai János több lap alján az utolsó szót a következő lap tetején megismételte, ezeket őrszavaknak nevezte. Benkő Samu a kéziratokat elolvasta és 1968-ban publikálta a nem matematikai jellegűekről szóló könyvét Bolyai János vallomásai címmel. A háromezer oldalnyi matematikai kéziratot Kiss Elemér marosvásárhelyi professzor olvasta végig az 1990-es években és beszámolóját az 1999-ben megjelent könyvében és cikkében tette közzé. A kéziratokban olyan jelentős matematikai eredményeket fedezett fel, melyek abban az időben újak voltak. Ilyen pl. az a számelméleti tétel, melyet Jeans harmincnyolc évvel Bolyai János halála után publikált és ma tankönyvanyag. Mindkét professzor hatalmas és rendkívül értékes munkát végzett. Bolyai János kézirataink egy részét színlapokra, borítékok hátlapjára írta, így nemcsak azok értelmezése, hanem puszta elolvasása is óriási munka volt. Jelenleg folyamatban van Bolyai János teljes kéziratanyagának a publikálása, Benkő Samu gondozásában.

A marosvásárhelyi gyűjteményen kívül van egy Bolyai-gyűjtemény a Magyar Tudományos Akadémia Könyvtárában. Ez jelentős részben Szabó Péter adománya révén keletkezett. Szabó Péter apja, Szabó Sámuel, marosvásárhelyi tanár volt, aki tanulmányozta a Bolyai-kéziratokat, ezek egy részét hazavitte, nála felejtődött és halála után a hagyatékából került elő. Az anyagot Szabó Péter átadta az Akadémiának, de maga is sok kéziratot, levelet gyűjtött a Bolyaiakkal kapcsolatban. A gyűjteményt

Fráterné (1968) rendszerezte és katalogizálta, nemrég Vekerdi (2001) írt róla érdekes cikket. A Bolyaiak felfedezésének korábbi történetéről Szénássy Barna (1977/1980) írt összefoglaló cikket.

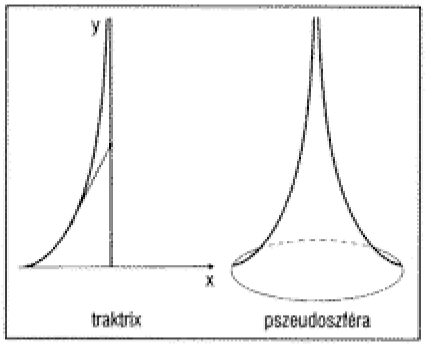
A Bolyaiak, különösen János és műve tisztelete egyre növekedett. 1897-ben az Appendix magyar fordításban is megjelent (Rados Ignác), ugyanebben az évben megjelent Bedőházy (Bolyai Farkas utódja a Marosvásárhelyi Kollégiumban) könyve „A két Bolyai” címmel, 1897-ben Kőnig Gyula és Réthy Mór szerkesztésében újból kiadták a Tentamen első kötetét, 1904-ben Kürschák József, Réthy Mór és Tőttösy Béla szerkesztésében a második kötetét. Bolyai János Appendixe a második kötet végére került. Bolyai János születésének 100. évfordulója alkalmából emlékülést rendeztek Kolozsvárott. A Mathematikai és Physikai Lapokban 1903-ban több cikk jelent meg Bolyai Jánossal és geometriájával kapcsolatban (Beke Manó, Réthy Mór, Szabó Péter, Schlesinger Lajos tollából, az utóbbi a kolozsvári ünnepség vezérszónoka volt). Az Akadémia 1902-ben Bolyai-díjat alapított, amit 1905-ben Poincaré, 1910-ben pedig Hilbert kapott meg. Mindketten fontos eredményeket értek el a geometria alapjaival és közelebbről, a hiperbolikus geometriával kapcsolatban is. (Poincaré ekkor szerzett tudomást arról, hogy Bolyai János magyar volt és nem bolgár, ahogyan azt az 1905-ben megjelent La valeur de la science című könyvében írta.)

Bolyai János születésének 150. évfordulója alkalmából Budapesten, a Magyar Tudományos Akadémián rendeztek emlékülést. Anyagát a Matematikai és Fizikai Tudományok Osztályának Közleményeiben közölték (szerzők: Kárteszi, Varga, Szász, Alexits, Kalmár, Hadamard). A 175. éves évforduló alkalmából újból az Akadémián volt szerényebb emlékülés, az előadások (Császár, Bretter, Sarlóska, Gazda, Lambrecht, Molnár) anyaga a Természet Világában jelent meg. Az eddigi utolsó emlékülést a 190. évfordulóra szintén az Akadémia szervezte. A 200. évfordulót nagy nemzetközi konferenciával Budapesten ünnepeljük, az Akadémia, a Bolyai János Matematikai Társulat, az Eötvös Loránd Fizikai Társaság, az ELTE, a Debreceni Egyetem, a Szegedi Egyetem, a kolozsvári Babeş-Bolyai Egyetem, az erdélyi Sapientia Egyetem, az MTA Matematikai Kutatóintézete és az MTA SZTAKI szervezésében.

Bolyai és Lobacsevszkij kidolgozta, és szisztematikusan felépítette a hiperbolikus geometriát, mely egyben az első nemeuklideszi geometria volt (ha eltekintünk korábbi, befejezetlen kísérletektől). E két nagy tudós azonban még nem bizonyította be az új geometria ellentmondás-mentességét.

Az ellentmondás-mentességet oly módon bizonyítjuk, hogy megadunk egy modellt, vagyis a matematikai objektumok egy összességét, egymáshoz való kapcsolatukkal, oly módon, hogy ezek az axiómákat, adott esetben a hiperbolikus geometria axiómáit teljesítik. Ha ugyanis van legalább egy realizációja az axiómarendszernek, akkor az nem lehet ellentmondásos.

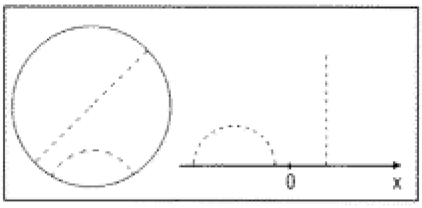
Elsőként az olasz Beltrami (1868) adott modellt a hiperbolikus geometriára. Ebben felhasználta Minding (1838) munkáját és a Riemann-geometria apparátusát. A modell az ún. pszeudoszféra, mely a traktrix forgásfelülete. A traktrix görbét az jellemzi, hogy bármely pontjához húzott érintőnek az érintési pont és a függőleges tengely közötti szakasza állandó hosszúságú **(2. ábra)**.



2. ábra. A traktrix és forgásfelülete

A traktrixot Huygens kutyagörbének nevezte, mert ha a vonakodó kutyát pórázon húzzuk az *y* tengely mentén, akkor a kutya a traktrix mentén mozog. A pszeudoszféra felületén az „egyenest" az jellemzi, hogy bármely két pontja között a legrövidebb utat valósítja meg.

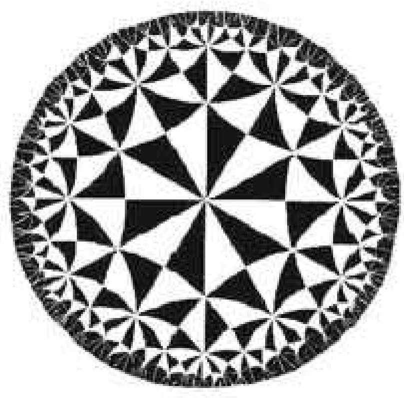
Poincaré modelljei ennél is egyszerűbbek. Az egyikben a pontok a perem nélküli (nyílt) körlap pontjai, az egyenesek pedig azok a (nyílt) körlapon belüli körívek, amelyek a peremmel merőlegesen találkoznak, továbbá a kör középpontján áthaladó euklideszi egyenesek. Poincaré másik modellje a nyílt félsík, az *x* tengely fölötti rész. Ebben a modellben az egyenes vagy olyan félkör, mely az *x* tengelylyel két pontban, merőlegesen találkozik, vagy olyan euklideszi egyenes, mely az *x* tengelyre merőleges **(3. ábra)**.



3. ábra. Poincaré körlap és félsík modellje „egyenesekkel"

A hiperbolikus geometriának sok alkalmazása van a matematikában és más tudományokban egyaránt. A matematikán belül a komplex függvénytanban nélkülözhetetlen eszköz az ún. Riemann-féle felületek tárgyalásában. Továbbfejlesztett változatai megjelennek a diszkrét geometriában, a topológiában, a csoportelméletben stb. Ami a fizikai alkalmazásokat illeti, legfontosabb a közvetett alkalmazása, megalkotása utat nyitott a Riemann-féle és más geometriák felé, melyek az általános relativitáselmélet matematikai alapjait szolgáltatják. Ám közvetlenül is alkalmazzák a hiperbolikus geometriát a relativitáselméletben (l. pl. Ungar cikkét, 1997). További alkalmazást találunk a statisztikus fizikában. Újabban az interneten az elágazó fák képernyőn való elrendezését a hiperbolikus geometria körlapmodelljére támaszkodva alkotják meg (pl. Gunn, 1993).

A hiperbolikus geometria világa nemcsak a tudósokra volt és van nagy hatással, hanem a művészekre is. Közöttük elsőként Eschert kell említenünk. Escher több grafikája, metszete foglalkozik olyan alakzatokkal, melyek egy körön belül helyezkednek el, és egyre kisebb példányaik a kör pereméhez közelednek. A perem közvetlen közelébe Escher kis köröcskéket helyezett el, melyek természetüknél fogva nem töltötték ki a körlapot. Miután azonban a művész tanulmányozta a híres kanadai geométer, H. S. MacDonald Coxeter hiperbolikus geometriai ábráit, és a tudóssal személyesen is megismerkedve annak képeivel kapcsolatos tanácsait elfogadta, megalkotta a csodálatos „circle limit" metszeteit. Ezeken a hiperbolikus geometria Poincaré-féle körlap modelljének „egyenesei" (euklideszi értelemben körívei) egyre kisebbé válva konvergálnak a peremhez (l. Escher 1989, 1992, 1995). A **4. ábrán** reprodukáljuk Coxeter (1998) ábráját, az **5. ábrán** pedig Escher Circle Limit III. című metszetét. Coxeter (1979) egy cikkben visszatért erre a metszetre és feltárta annak kapcsolatát a nemeuklideszi geometriával.



4. ábra. Coxeter hiperbolikus geometriai mozaikábrája

5 ábra. Escher Circle Limit III. című metszete

Egy másik, hiperbolikus geometriával kapcsolatos műalkotás a berlini Conrad Pelthier munkája. Ennek alapjául Reynolds (1993) cikke szolgált, melyben a szerző a hiperbolikus geometria egy hiperboloidon megvalósított modelljét írja le. A kép Stillwell (1996) könyvének borítólapján is látható.

Végül megemlítjük, hogy az Amerikai Egyesült Államok Berkeley (Kalifornia) egyetemén működő Mathematical Research Institute (MSRI) intézete nemrég egy matematikai szobrot készíttetett, melyet annak udvarán állítottak fel. A szobor Felix Klein ún. kvartikus görbéjét ábrázolja és címe: „The eightfold way". A szobor talapzatán a hiperbolikus geometria körlap modelljét idéző színes cserépmozaikot rakattak, mégpedig a magyar Biczó Lajossal, arra emlékezve, hogy a hiperbolikus geometria egyik felfedezője magyar ember volt. A szoborról egész könyvet írtak, Lévy (2001) szerkesztésében.

Az axiomatikus gondolkodásról

A matematika történetében a nemeuklideszi geometria lett az első olyan ellentmondásmentes, zárt, logikai rendszer, mely nincs közvetlen kapcsolatban a valósággal. Megalkotása a fizikai valóságból indult ki, ám önálló matematikai elméletté vált. Ezzel nem az következett be, hogy alkalmazhatatlanná vált volna, hanem éppen ellenkezőleg, lehetővé vált, hogy matematikusok, fizikusok, számítástechnikusok és mások felhasználják, alkalmazzák a problémák nagy sokaságára.

A nemeuklideszi geometria nem az egyetlen önálló matematikai elmélet, mely Bolyai idejében keletkezett. A XIX. század közepén Angliában és Írországban megszületett az absztrakt algebra, vagy ahogyan abban az időben nevezték, szimbolikus algebra. Már a század elején a matematikusok szabadon végeztek műveleteket valós és komplex számokkal, anélkül hogy akármelyik, kiváltképpen pedig a komplex számok, rendelkezett volna mai értelemben vett egzakt matematikai megalapozással. Ez szükségessé tette, hogy a műveleti szabályok (asszociativitás, kommutativitás stb.) világos, áttekinthető rendszerbe legyenek foglalva. Egyidejűleg az is felvetődött, hogy a műveleteket kiterjesszék, pl. lehetséges legyen egy pozitív valós számnak valós hatványra emelése. Szimbólumokkal számoltak, a játékszabályok betartásával. Az is felvetődött, hogy ezeket a szabályokat elvontan tekintsék, ne csupán számokra vonatkoztassák.

A szimbólumok szerepét a matematikai gondolkodásban már Kant is tárgyalta műveiben. Lambert az euklideszi XI. axiómát a többitől tisztán szimbolikusan akarta levezetni (1786, § 11).

George Peacock (1791–1858) Cambridge matematikusa, később az Ely katedrális dékánja volt az első Angliában, aki a matematikai manipulációk megalapozásának a szükségességét felvetette. Nem szorítkozott az algebrára, a problémát kiterjesztette a differenciálszámításra is. Az algebránál maradva Duncan Gregory (1813–1844) a következő jelentős személyiség a szimbolikus algebra létrehozásában. Álláspontját egy 1840-ből származó művében az alábbi módon jellemzi: „A szimbolikus algebrát annak fényében tekintem, hogy az a műveletek kombinációinak a tudománya, nem annak természete által, hogy azok mik és mit eredményeznek, hanem azok által a törvények által, amiknek engedelmeskednek”. Az algebrát tehát eltávolították attól, amire korábban használták, a pozitív valós számokkal való műveletektől, pontosabban szólva, kiterjesztették a hatókörét.

A következő fontos lépést De Morgan (1806–1871) tette meg. Ő volt az első, aki az új algebrának a logikában való alkalmazását felvetette. Tőle származnak azok a szimbolikus logikai operációk, amelyeket De Morgan-törvényeknek nevezünk.

Az ír származású Hamilton (1805–1865) algebrai vonatkozású eredményei körül a komplex számok egzakt megalapozását és a kvaterniók fogalmának a megalkotását, elméletének a kiépítését kell megemlítenünk. (A kvaterniókról szóló művét megküldte Gaussnak és hasonló választ kapott, mint Bolyai János az Appendixre.)

George Boole (1815–1864) munkássága és elsősorban 1854-ben közreadott The Laws of Thought című könyve a következő, melyet a felsorolásban megemlítünk. A nevéhez fűződő algebrát szinte mindenki ismeri, alkalmazása a matematikában, a logikában, az áramkörök elméletében stb. igen jól ismert.

Arthur Cayley (1821–1895) és James Joseph Sylvester (1814–1897) elsősorban a mátrixelmélet és a csoportelmélet megalkotásával vett részt a brit algebrai iskola tevékenységében.

Absztrakt geometria, absztrakt algebra stb., a matematika tehát most már nem szól semmi konkrétumról, csak elvont struktúrákról? Ezzé vált volna a matematika súlyos problémák megoldása után? Csak absztrakt matematika van és a valósághoz nincs már semmi köze? Nem erről van szó. A matematika módszere azonban abban áll, hogy a valóságos objektumokat matematikai objektumokkal helyettesítjük, modellt alkotunk, és azon belül oldjuk meg a matematikai problémákat. A valósághoz azonban vissza kell térnünk. Eredményeinket alkalmaznunk kell, annál inkább, mert az új gondolatok, modellek, struktúrák keletkezésének ez a legfőbb forrása. Persze vannak félresiklások, ezek körül nagy vita folyik. Érdekes vitacikk például Thom (1971) munkája, melyben a valóságtól elszakadt matematikai alkotásokat és a túlságosan absztrakt oktatási módot bírálja.

A XIX. század közepén nem csak a matematikában erősödött fel az axiomatikus módszer alkalmazása. Az axiomatizálási láz más tudományokra is átterjedt. Az axiomatizálás a fizikában persze nem számított új dolognak, most azonban, meglepő módon, a mérnökök is egzakt alapokra akartak helyezni egy-egy műszaki tudományt azok axiomatizálása révén. Ennek az irányzatnak két jeles képviselője a német Ferdinand Redtenbacher (1809–1863) és a svájci Franz Reuleaux (1829–1905). A változókat és a lehetséges mozgásokat rendszerezték, meghatározták egymáshoz való viszonyukat és a mechanizmusokkal kapcsolatban tételeket is bizonyítottak. Ennek az elméletnek a gyakorlati hasznát abban az időben ugyan megkérdőjelezték, ám alkotóikat segítette új mechanizmusok konstrukciójában (l. S. Brentjes, 1882).

Az axiomatikus gondolkodásnak vannak korlátai is. Az egyiket ezek közül Gödel (1931) fogalmazta meg híres tételében. Gödel bebizonyította, hogy minden, elég általános feltételeknek eleget tevő axiómarendszeren belül megfogalmazható olyan probléma, mely sem igenlően, sem tagadólag nem válaszolható meg. Erre Eukleidész V. posztulátumának problémája a legklasszikusabb példa.

Más természetű korlátot jelent az, hogy a matematikusok hajlamosak lettek arra, hogy csak axiómarendszerek kínálta problémákkal foglalkozzanak és megfeledkezzenek az elméleteknek a valósággal való kapcsolatáról. Igen érdekes gondolatokat olvashatunk erről Von Mises (1957) könyvében. E kérdéskör kifejtésére egy másik cikkben térünk majd vissza.

Az axiomatikus gondolkodás és feladatmegoldás a tudományt alkalmazók mindennapi kenyerévé vált. Amikor egy probléma megoldásához hozzáfogunk, összegyűjtjük változóinkat, állandóinkat, meghatározzuk ezek kapcsolatát, és ha matematikai jellegű problémáról van szó, akkor egy eljárást, algoritmust is megalkotunk, vagy egyszerűen csak felhasználunk. A feladatok megoldása azonban egy ember-gép rendszerrel történik, a gép ma elektronikus, digitális számítógépet jelent. A legegyszerűbb gép, melyet ősidők óta felhasználnak, a körző és a vonalzó. Ezek tulajdonképpen analóg gépek. Amikor egy geométer valamilyen geometriai objektumot megszerkeszt, akkor azt az ember-gép rendszert használja fel, amelyben a gép a körző és a vonalzó. Az abakusz, majd később Pascal, Leibniz, Babbage, Zuse számítógépei (l. Korte, 1981) egyre bonyolultabb feladatok megoldását tették lehetővé egyre hatékonyabban. Ma már az 1946-ban megszületett ENIAC (Electronic Numerical Integrator and Computer) első elektronikus számítógép nagy teljesítményű utódait használjuk feladataink megoldására.

A modern feladatmegoldásnak ez a technikája ma nagyon hatékonyan működik. Ebben, mint említettük, alapvetően fontos momentum az axiomatikus gondolkodás, ugyanis minden egyes feladatot egy-egy axiómarendszerrel írunk le. Az axiomatikus gondolkodás széles körű elterjedése egyike azoknak, amiket Bolyai János forradalma eredményezett.

Bolyai János munkássága tehát nem csupán a geometriában, a matematika egészében, a filozófiában és a kultúrtörténetben hozott újat, hanem utat nyitott a feladatmegoldás új szemléletmódja számára is.

Irodalom

[1] Alexits Gy. (1952). Bolyai János. Matematikai Lapok 3, 107–110.

[2] Alexits Gy. (1953). Bolyai János élete és munkássága. MTA Mat. Fiz. Tud. Oszt. Közl. 3, 131–150.

[3] Alexits Gy. (1977). Bolyai János világa. Akadémiai Kiadó, Budapest, 1977.

[4] Alexits Gy. (1977/1980). Bolyai János világa. Matematikai Lapok 28, 1–9

[5] Anderson, J. W. (1999). Hyperbolic geometry. Springer Verlag, London.

[6] Ács T. (1997). Bolyai János a bécsi császári és királyi mérnökakadémián 1818–1823. Bolyai János Katonai Műszaki Főiskola, Budapest.

[7] Ács T. (1998). Egy ismeretlen akadémiai pályázat sorsa. Hadtörténeti Közlemények 111, 284–291.

[8] Barndorff-Nielsen, O. (1978). Hyperbolic distributions and distributions on hyperbolae. Scand. J. Statist, 5, 151–157.

[9] Beke M. (1903). A Bolyai-féle trigonometria. Mathematikai és Physikai Lapok 12, 30–49.

[10] Bell, E. T. (1972). The Development of Mathematics. Dover Publications Inc., New York.

[11] Bell, E. T. (1986). Men of Mathematics. Simon and Schuster, New York.

[12] Beltrami, E. (1868). Saggio di interpretazione della geometria non-euclidea. Giornate di Matematiche VI., 284–312.

[13] Beltrami, E. (1868). Teoria fondamentale degli spazii di curvatura costante. Ann. Mat. pura appl. Ser. II, 232–255.

[14] Benkő S. (1968). Bolyai János vallomásai. Irodalmi Könyvkiadó, Bukarest. Második kiadás: Kritérion Könyvkiadó, Bukarest, 1972.

[15] Benkő S. (1971). Sorsformáló értelem. Művelődéstörténeti dolgozatok. Kritérion Könyvkiadó, Bukarest.

[16] Benkő S. (1978). Apa és fiú (Bolyai tanulmányok). Magvető Könyvkiadó, Budapest.

[17] Benkő S. (1979). Haladás és megmaradás. Művelődéstörténeti tanulmányok. Szépirodalmi Könyvkiadó, Budapest.

[18] Bolyai F. (1830). Az arithmetica eleje. Marosvásárhely.

[19] Bolyai Farkas (1832–1833). Tentamen juventutem studiosam matheseos purae, elementaris ac sublimioris, methodo intuitiva evidenciaque huic propria, introducendi. Cum appendici triplici. I., II. Marosvásárhely.

[20] Bolyai Farkas (1897, 1904). Tentamen (második kiadás, szerkesztők: Kőnig Gy. és Réthy M. első kötet, Kürschák J., Réthy M. és Tőttössy B., második kötet). Magyar Tudományos Akadémia.

[21] A Bolyai–Gauss-levelezés (2001). Válogatta és szerkesztette Nagy F. Better, Püski, Budapest.

[22] Bolyai Joannes (1831). Appendix prima scientia spatii, a veritate aut falsitate axiomatis XI-mi Euclidei (a priori haud unquam decidenda) independens: atque ad casum falsitatis quadratura circuli geometrica. Marosvásárhely.

[23] Bolyai Joannes (1832). Appendix Stientiam Spatii absolute veram exhibens: a veritate aut falsitate Axiomatis XI. Euclidei (a priori haud unquam decidenda) independentem; adjecta ad casum falsitatis, quadratura circuli geometrica. In: Bolyai F., Tentamen, Tom. I. Marosvásárhely.

[24] Bolyai János (1868). La science absolue de l'espace… (latinból fordította Hoüel. Bordeaux Mem. 5, 207–248.

[25] Bolyai János (1868). Sulla scienza della spazio assolutamente vera… (latinból fordította Battaglini). Giorn. Mat. 6, 97–116.

[26] Bolyai János (1891). The science of absolute space… (fordította G. B. Halsted). Austin, Texas. További kiadások 1892, 1894, 1896.

[27] Bolyai János kéziratos hagyatéka. Bolyai–Teleki Könyvtár. Marosvásárhely,

[28] Bolyai-levelek (1975). Válogatta, a bevezető tanulmányt írta és a jegyzeteket összeállította Benkő Samu. Kritérion Könyvkiadó, Bukarest.

[29] Bolyai János (1977). Appendix, a tér tudománya (szerk. Kárteszi Ferenc). Akadémiai Kiadó, Budapest.

[30] Bolyai Jánosra emlékezünk! Születésének 175. évfordulóján (szerk. Staar Gyula). Tudományos Ismeretterjesztő Társulat budapesti szervezete, Budapest, 1978.

[31] Bolyai (2001). Biográfia, bibliotéka, bibliográfia (szerk. Nagy F.). Better, Püski, Budapest.

[32] Bonola, R. (1911). Non-Euclidean Geometry. Dover, New York.

[33] Boole, G. (1854). An Investigation of the Laws of Thought on which are Founded the Mathematical Theories of Logic and Probabilities. Macmillan, Cambridge.

[34] Born, M. (1965). Einstein's Theory of Relativity. Dover, New York.

[35] Bos, H. J. M. (2001). Redifining geometrical exactness. Descartes transformation of the early modern concept of construction. Springer, New York.

[36] Boyer, C. B. (1991). A History of Mathematics, (második kiadás). Wiley, New York.

[37] Brentjes, S. (1982). Relations between mathematics and engineering in the 19th century in Germany (kézirat).

[38] Bretter Gy. (1978). A felőrlődés logikája. Természet Világa 109, 92–93.

[39] Briefwechsel zwischen Carl Friedrich Gauss und Christian Ludwig Gerling (1927). Clemens Schaeffer, Berlin.

[40] Briefwechsel zwischen C. F. Gauss-Friedrich Wilhelm Bessel (1975). Georg Olms Verlag, Hildesheim, New York.

[41] Briefwechsel zwischen C. F. Gauss und H. C. Schumacher, 1–3 (1975). Georg Olms Verlag, Hildesheim, New York.

[42] Burton, D. M. (1985). The History of Mathematics. An Introduction. Allyn and Bacon Inc. Boston, London.

[43] Cajori, F. (1991). A History of Mathematics. Chelsea Publ. Co., New York.

[44] Caygill, H. (2000). A Kant Dictionary. Blackwell.

[45] Cayley, A. (1854). On the Theory of Groups. Philosophical Magazine 7, 40–47.

[46] Coxeter, H. S. M. (1977). Gauss as a Geometer. Historia Mathematica 4, 379–396.

[47] Coxeter, H. S. M. (1979). The non-Euclidean symmetry of Escher's picture „Circle Limit III." Leonardo 12 (1979), 19–25.

[48] Coxeter, H. S. M. (1998). Non-Euclidean geometry, 6th ed., Mathematical Association of America, Washington, DC.

[49] Császár Á. (1978). Bolyai János és Gauss. Természet Világa 109, 89–92.

[50] Dávid L. (1959). In memoriam Wolfgang Bolyai. MTA Mat. Fiz. Tud. Oszt. Közl. 9, 215–236.

[51] Dávid L. (1979). A két Bolyai élete és munkássága. Második, bővített kiadás. Gondolat, Budapest.

[52] Deé Nagy Anikó (2000). A két Bolyai könyvtára. Erdélyi Múzeum 1–2. szám, 19–45.

[53] Dunnington, G. W. (1955). Gauss: titan of science. Hafner, New York.

[54] Escher, M. C. (1989). Escher on Escher: exploring the infinite. Harry N. Abrams, New York. With contribution by J. W. Vermeulen; hollandból fordította Karin Ford.

[55] Escher, M. C. (1992). The graphic work: introduced and explained by the artist, Benedikt Taschen Verlag.

[56] Escher, M. C. (1995). The M. C. Escher sticker book. Harry N. Abrams, New York.

[56a] Eukleidész (1983). Elemek. Gondolat, Budapest.

[57] Ewald, W. (1999). From Kant to Hilbert. A Source Book in the Foundations of Mathematics Vols. I, II. Clarendon Press, Oxford.

[58] Fowler, D. (1999). The Mathematics of Plato's Academy. A new reconstruction. (második kiadás). Clarendon Press, Oxford.

[59] Fráter Jánosné (1968). A Bolyai-gyűjtemény. Magyar Tudományos Akadémia Könyvtára (K22–K30).

[60] Frege, G. (1884). Die Grundlagen der Arithmetik, eine logisch-mathematische Untersuchung über den Begriff der Zahl. Koebner, Breslau. (Angol fordítása: The Foundations of Arithmetic, A Logico-Mathemathical Enquiry into the Concept of Number. Basil Blackwell, Oxford, 1950, átdolg. 2. kiadás 1953; fordító: John Langshaw).

[61] Gauss, C. F. (1870–1929). Werke, 1–12. kötetek, második nyomás. Göttingen, Gotha, Leipzig, Berlin.

[62] Gödel, K. (1931). Über formal unentscheidbare Satze der Principia Mathematica und verwandte Systeme. Monat. Math. Phys. 38, 173–198.

[63] Grabiner, J. V. (1974). Is Mathematical Truth Time-Dependent? American Math. Monthly 81, 354–365.

[64] Grattan-Guinness, I. (1998). The Norton History of the Mathematical Sciences. Norton and Co. New York.

[65] Gray, J. (1979). Ideas of Space. Clarendon Press, Oxford.

[66] Gray, J. (1979). Non-Euclidean Geometry – A Re-Interpretation. Historia Mathematica 6, 236–258.

[67] Greenberg, M. J. (1993). Euclidean and Non-Eucliden Geometries (harmadik kiadás). Springer, New York.

[68] Gregory, D. F. (1840). On the nature of symbolical algebra. Transactions of the Royal Society of Edinburgh 14, 208–216.

[69] Gunn, C. (1993). Discrete groups and visulaization of three-dimensional manifolds. In: ACM SIGGRAPH Computer Graphics Proceedings, Annual Conference Series, 255–262.

[70] Hadamard, J. (1953). A nem-euklideszi geometria és az axiomatikus definíciók. MTA Mat. Fiz. Tud. Oszt. Közl. 3, 199–208.

[71] Hadamard, J. (1999). Non-Euclidean Geometry in the Theory of Automorphic Functions (J. J. Gray and A. Shenitzer eds.). History of Math. Vol. 17, Amer. Math. Soc., London Math. Soc.

[72] Hamilton, W. R. (1837). Theory of conjugate functions, or algebraic couples; with a preliminary and elementary essay on algebra as the science of pure time. Transactions of the Royal Irish Academy 17, 293–422.

[73] Hamilton, W. R. (1853). Lectures on Quaternious. Hodges and Smith, Dublin.

[74] Hamilton, W. R. (1931–1967). The Mathematical Papers of Sir William Hamilton (H. Halberstam and R. E. Ingram eds.). Cambridge University Press.

[75] Hankel, H. (1884). Die Entwicklung der Mathematik in den letzten Jahrhunderten (második kiadás). Verlag und Druck von Franz Vues, Tübingen

[76] Hartshorne, R. (2000). Geometry: Euclid and Beyond. Springer, New York.

[77] Helmholz, H. (1878). Die Thatsachen in der Wahrnehmung. Berlin.

[78] Helmholz, H. (1884). Vortrage und Reden I, II. Vieweg, Braunschweig.

[79] Hollingadale, S. (1994). Makers of Mathematics. Penguin Group, New York.

[80] Iversen, B. (1992). Hyperbolic geometry. Cambridge University Press, Cambridge, UK.

[81] Jelitai J. (1939). Bolyai János 1849. május 13-án kelt jelentés tervezete. Matematikai és Természettudományi Értesítő 58, 708–715.

[82] Kaestner, A. G. (1790). Was heisst in Euclids Geometrie möglich? Philosophisches Magazin herausgegeben von J. A. Eberhardt. Halle a. S.

[83] Kalmár L. (1953). A Bolyai–Lobacsevszkij-féle geometria hatása az axiomatikus módszer fejlődésére. MTA Mat. Fiz. Tud. Oszt. Közl. 3, 235–242.

[84] Kant, I. (1781, 1787). Kritik der reinen Vernunft. (Első, második kiadás.) Johann Friedrich Hartknoch, Riga.

[85] Kant, I. (1788) Kritik der praktischen Vernunft. Johann Friedrich Hartnoch, Riga.

[86] Kant, I. (1790). Erste Einleitung in die Kritik der Urteilskraft. L. Kant művei 5. kötet, kiadta E. Cassirer, 1922.

[87] Kárteszi F. (1953). Lobacsevszkij élete és munkássága. MTA Mat. Fiz. Tud. Oszt. Közl. 3, 189–197.

[88] Kárteszi F. (1976). Bolyai János életműve. Matematikai Lapok 27, 59–63.

[89] Kárteszi F. (1980/1983). Az Appendix előzményei és tudományos eredményei. Matematikai Lapok 31, 15–22.

[90] Kiss E. (1994). A „Bolyai-ládák” legújabb titkai. Természet Világa 125, 405–408.

[91] Kiss E. (1999). Matematikai kincsek Bolyai János kéziratos hagyatékából. Akadémiai Kiadó, Budapest.

[92] Kiss E. (1999). Notes on János Bolyai's researches in number theory. Historia Mathematica 26, 68–76.

[93] Klein, F. (1872). Vergleichende Bertrachtungen über neuere geometrische Forschungen (Erlanger Programm). Akademische Verlagsgesellschaft, Leipzig, 1974.

[94] Klein, F. (1873). Über die sogenannte Nicht-Euklidische Geometrie. Math. Ann. 6, 112–145.

[95] Klein, F. (1928). Vorlesungen über Nichteuklidische Geometrie. Springer, Berlin.

[96] Kline, M. (1990). Mathematical Thought from Ancient to Modern Times I. II. III. Oxford University Press, Oxford, UK.

[97] Koncz J. (1887). A marosvásárhelyi Evangélikus–Református Kollégium Könyvnyomdájának száz éves története. Marosvásárhely.

[98] Koncz J. (1896). A marosvásárhelyi Evangélikus–Református Kollégium Története. Marosvásárhely.

[99] Kosáry D. (2001). Újjáépítés és polgárosodás 1711–1867. História/Holnap Kiadó, Budapest.

[100] Korte, B. (1981). Zur Geschichte des maschinelles Rechnens. Bouvier Verlag, Herbert Grundmann, Bonn.

[101] Lambert, J. H. (1786). Theorie der Parallellinien In: Engel und Stäckel (1895).

[102] Lambrecht M. (1973). Bolyai János mint regényhős. Természet Világa 104, 504–505.

[103] Lánczos K. (1976). A geometriai térfogalom fejlődése. Gondolat, Budapest.

[104] Legendre, A. M. (1794). Eléments de géométrie. Paris.

[105] Lévy, S. ed. (2001). The eightfold way. The beauty of Klein's quartic curve. Cambridge University Press, Cambridge, UK.

[106] Lobacsevszkij, N. I. (1837). Géometrie imaginaire. Journal für de Reine Und Angewandte Mathematik 17, 295–320.

[107] Lobacsevszkij, N. I. (1840). Geometrische Untersuchungen zur Theorie der Parallellinien. Berlin.

[108] Lobacsevszkij, N. I. (1951). Geometriai vizsgálatok a párhuzamosok elméletének köréből (V. F. Kagan bevezetésével, magyarázataival és függelékével). Akadémiai Kiadó, Budapest.

[109] Milnor, J. (1982). Hyperbolic geometry: The first 150 years. Bull. (New Series) Amer. Math. Soc. 6, 9–24.

[110] Minding F. (1838). Über die Biegung krummer Flächen. J. reine angew. Math. 18, 365–368.

[111] von Mises, R. (1981). Probability, statistics and truth. Dover, New York.

[112] Molnár E. (1975). Bolyai János és a „tér tudománya”. Természet Világa 106, 469–470.

[113] Nagy I. (1858). Magyarország családjai címerekkel és nemzedéki táblákkal II. kötet. Pest.

[114] Orbán B. (1868). A Székelyföld leírása történelmi, régészeti s népismei szempontból. Ráth Mór Bizománya. Pest.[115] Pálffy I. és Pálffy M. (1962). Bibliographia Bolyaiana 1831–1960. A Bolyai geometria szakirodalmának jegyzéke. Országos Széchényi Könyvtár, Budapesti Műszaki Egyetem Központi Könyvtára.

[116] Peacock, G. (1830). A Treatise on Algebra. Deighton, Cambridge.

[117] Poincaré, H. (1960). Mathematical Creation. In: The World of Mathematics, Vol. 4 (J. R. Newman ed.). George Allen and Unwin Ltd., London, 2041–2050.

[118] Poincaré, H. (1985). Papers on Fuchsian Functions. Springer-Verlag.

[119] Poincaré, H. (1905, 2001). La valeur de la Science. Angol fordítása: The value of science. The Modern Library, New York.

[120] Redtenbacher, F. (1852). Prinzipien der Mechanik und des Maschinenbaus. Mannheim.

[121] Rényi A. (1952). Bolyai János a tudomány nagy forradalmára. Matematikai Lapok 3, 174–178.

[122] Réthy M. (1903). Bolyai János „ujj, más világának ismertetése”. Mathematikai és Physikai Lapok 12, 1–29.

[123] Reuleaux, F. (1875). Theoretische Kinematik. Braunschweig.

[124] Reynolds, W. F. (1993). Hyperbolic Geometry on a Hyperboloid. American Mathematical Monthly 100, 442–455.

[125] Riemann, B. (1868). Über die Hypotehesen, welche der Geometrie zu Grunde liegen. Abhandlungen der Königlichen Gesellschaft der Wissenschaften zu Göttingen 13, 133–152.

[126] Riemann, B. (1876). Gesammelte Mathematische Werke und Wissenschaftlicher Nachlass (H. Weber és R. Dedekind szerk.) Teubner, Leipzig.

[127] Riemann, B. (1921). Über die Hypothesem, welche der Geometrie zu Grunde liegen. (Új kiadásban, H. Weyl magyarázatával). Julius Springer, Berlin.

[128] Saccheri, G. (1920). Euclides vindicatus (fordította G. B. Halsted). Open Court, Chicago.

[129] Sarlóska E. (1965). Bolyai János – a katona. MTA Mat. Fiz. Tud. Oszt. Közl. 15, 341–387.

[130] Sarlóska E. (1973). A 150 éves „Bolyai”. Természet Világa 104, 482–484, 507.

[131] Sarlóska E. (1973). Gondolatok Benkő Samu könyvéről. Természet Világa 104, 504.

[132] Schlesinger L. (1903). Bolyai János. Mathematikai és Physikai Lapok 12, 57–88.

[133] Schlesinger L. (1903). Bolyai János szülőházáról. Mathematikai és Physikai Lapok 12, 53–56.

[134] Schmidt, F. (1868). Aus dem Leben zweier ungarischer Mathematiker, Johann und Wolfgang Bolyai von Bolya. Grunerts Archiv der Math. Und Phys. Greifswald 48, 217–228.

[135] Schmidt, F. (1899). Briefwechsel zwischen Carl Friedrich Gauss und Wolfgang Bolyai. Leipzig.

[136] Sheehan, J. J. (1994). German History 1770–1866. The Oxford History of Modern Europe. Clarendon Press, Oxford.

[137] Staar Gy. (1990). A megélt matematika c. kötetben 59–80 old.: A lámpás ember – Weszely Tibor. Gondolat, Budapest.

[138] Stäckel, P., Engel, F. (1895). Die Theorie der Parallallinien von Euklid bis auf Gauss. Teubner, Leipzig.

[139] Stäckel P. (1902). Vizsgálatok az absolut geometria köréből Bolyai János hátrahagyott irataiban. Mathematikai és Természettudományi Értesítő 20, 160–186.

[140] Stäckel P. (1902). Bolyai János észrevételei Lobacsevszkij Miklósnak a parallelákra vonatkozó vizsgálataira. Matematikai és Természettudományi Értesítő 20, 40–67.

[141] Stäckel P. és Kürschák J. (1902). Bolyai János észrevételei Lobatschefszkij Miklósnak a parallelákra vonatkozó vizsgálataira. Matematikai és Természettudományi Értesítő 20, 41–67.

[142] Stäckel P. (1903). Bolyai János térelmélete. Matematikai és Természettudományi Értesítő 21, 135–145.

[143] Stäckel, P. (1914). Bolyai Farkas és Bolyai János geometriai vizsgálatai I–II. Budapest.

[144] Stillwell, J. (1996). Sources of Hyperbolic Geometry. History of Math. Vol 10, Amer. Math. Soc., London Math. Soc.

[145] Szász P. (1973). Bevezetés a Bolyai–Lobacsevszkij-féle geometriába. Akadémiai Kiadó, Budapest.[146] Strommer Gy. (1977/1980). A Bolyai geometria szerkesztéselméletéről. Matematikai Lapok 28, 65–67.

[147] Szabó P. (1903). Az abszolút geometria egyik alaptételéről. Mathematikai és Physikai Lapok 12, 321–326.

[148] Szász P. (1953). A hiperbolikus trigonometria különböző elemi előállításai. MTA Mat. Fiz. Tud. Oszt. Közl. 3, 209–225.

[149] Szénássy B. (1960). Bolyai János. A matematika tanítása 7, 34–39.

[150] Szénássy B. (1970). A magyarországi matematika története (A legrégebbi időktől a 20. század elejéig). Akadémiai Kiadó, Budapest.

[151] Szénássy B. (1975). Bolyai Farkas. Akadémiai Kiadó, Budapest.

[152] Szénássy B. (1978). Kérdések és válaszok. In: Bolyai Jánosra emlékezünk! TIT Budapesti Szervezete Matematikai Szakosztályának kiadványa, 29–40.

[153] Szénássy B. (1978). Bolyai János. Akadémiai Kiadó, Budapest.

[154] Szénássy B. (1977/1980). Megjegyzések Gauss nemeuklideszi geometriai eredményeihez. Matematikai Lapok 28, 133–140.

[155] Szénássy B. (1977/1980). Adalékok a két Bolyai fölfedezésének történetéhez. Matematikai Lapok 29, 71–95.

[156] Szénássy B. (1980/1983). A két Bolyai életútja és a Tentamen tudományos jelentősége. Matematikai Lapok 31, 3–14.

[157] Szőkefalvi-Nagy, Gy. (1953). Bolyai János szögharmadolása. Matematikai Lapok 4, 84–86.

[158] Taurinus, F. A. (1826). Geometriae prima elementa. Köln.

[159] Thom, R. (1971). „Modern” Mathematics: An Educational and Philosophic Error? American Scientist 59, 695–699.

[160] Thurston, W. P. (1982). Three dimensional manifolds, Kleinian groups and hyperbolic geometry. Bull. (New Series) Amer. Math. Soc. 6, 357–381.

[161] Thurston, W. P. (1997). Three-Dimensional Geometry and Topology, Vol. I. Princeton University Press, Princeton, N. J.

[162] Toró T. (1973). Nemeuklideszi geometriák a modern fizikában és a relativisztikus kozmológiában. Korunk Évkönyv, Kolozsvár, 245–256.

[163] Torretti, R. (1996). Relativity and Geometry. Dover, New York.

[164] Tóth Imre (1965). A nemeuklideszi geometria előtörténetéből. Matematikai Lapok 16, 300–315.

[165] Tóth Imre (2000). Isten és geometria. Osiris, Budapest.

[166] Tymoczko, T. (1998). New Directions in the Philisophy of Mathematics (revised and expanded paperback edition). Princeton University Press, Princeton N. J.

[167] Ungar, A. (1997). Thomas Precession: Its Underlying Gyrogroup Axioms and their use in Hyperbolic Geometry and Relativistic Physics. Foundations of Physics 27, 881–951.

[168] Ungar, A. (1999). The hyperbolic Pythagorean theorem in the Poincaré disk model of hyperbolic geometry. The American Mathematical Monthly 106, 759–763.

[169] Varga O. (1953). A Bolyai–Lobacsevszkij-geometria hatása a geometria fejlődésére. MTA Mat. Fiz. Tud. Oszt. Közl. 3, 151–171.

[170] Vállas A. (1836). Literatúratörténet. Tudománytár, 143–172.

[171] Vekerdi L. (1969). Kalandozás a tudományok történetében. Magvető Kiadó, Budapest

[172] Vekerdi L. (1981). A Bolyai-kutatás változásai. Természet Világa 112, 56–58.

[173] Vekerdi, L. (2001). A Bolyai-gyűjtemény a Bolyai-kutatásban. Örökségünk, élő múltunk. Gyűjtemények a Magyar Tudományos Akadémia Könyvtárában. MTA Könyvtára, Budapest, 85–114.

[174] Weszely Tibor (1974). Bolyai Farkas, a matematikus. Tudományos Könyvkiadó, Bukarest.

[175] Weszely Tibor (1981). Bolyai János matematikai munkássága. Kritérion, Bukarest.

[176] Weszely Tibor (1980/1983). Bolyai János kéziratban hátrahagyott matematikai munkáiról. Matematikai Lapok 31, 29–37.

[177] Weszely T. (1985). Bolyai János emlékezete. In: Bolyai Jánosra emlékezünk! TIT Budapesti Szervezete Matematikai Szakosztályának kiadványa.