Az Ikerprím sejtés bizonyítása

Dénes Tamás matematikus-kriptográfus
Email: tdenest@freemail.hu

Abstract

Jelen szerző 2001-ben bizonyított *komplementer prímszita tétele* szerint (lásd [Dénes 2001]), bármely $N=6k+1$ alakú természetes szám, akkor és csak akkor összetett, ha $k=6uv+u+v$, vagy $k=6uv-u-v$ alakú természetes szám. E tételre alapozva adunk indirekt bizonyítást az Ikerprím sejtésre, amelyet ezután Ikerprím tételnek nevezhetünk.

----- . -----

Ikerprím tétel

Végtelen sok p, $p+2$ alakú prímpár van.

Bizonyítás (indirekt)

Tegyük fel, hogy az alábbi 1. táblázatban, amely [Dénes 2001]-szerint az 1. és 3. oszlopában tartalmazza az összes prímszámot, a K-ik sorban van az utolsó ikerprím pár, azaz

(1a)
$$6K-1,\, 6K+1 \; prímek\; és\; \forall k = K + x \quad (x\;\; term.szám) \;\Rightarrow$$
$$\Rightarrow \quad Ha\; 6k-1\; prímszám,\, akkor\; 6k+1\; NEM\;\; PRÍM$$

vagy

(1b)
$$6K-1,\, 6K+1 \; prímek\; és\; \forall k = K + x \quad (x\;\; term.szám) \;\Rightarrow$$
$$\Rightarrow \quad Ha\; 6k+1\; prímszám,\, akkor\; 6k-1\; NEM\;\; PRÍM$$

(1a) esetén a [Dénes 2001]-beli 2. tétel szerint k-ra a következő egyenletek valamelyike teljesül:

(2) $\qquad k=6uv+u+v \qquad$ ($u>0$ és $v>0$ természetes számok)

vagy

(3) $\qquad k=6uv-u-v \qquad$ ($u>0$ és $v>0$ természetes számok)

Ekkor az (1a) indirekt feltételből és (2)-ből adódik, hogy

(4)
$$k=K+x=6uv+u+v \Rightarrow 6K+1=6(6uv+u+v-x)+1 = \underbrace{6(6uv+u+v)+1}_{(1a)\; és\; (2) \Rightarrow NEM\;\; PRÍM} - 6x$$

Az (1a) indirekt feltételből és (3)-ból adódik, hogy

(5)
$$k=K+x=6uv-u-v \Rightarrow 6K+1=6(6uv-u-v-x)+1 = \underbrace{6(6uv-u-v)+1}_{(1a)\; és\; (3) \Rightarrow NEM\;\; PRÍM} - 6x$$

Dénes Tamás matematikus-kriptográfus email: tdenest@freemail.hu

(4)-nek vagy (5)-nek minden *x>0* természetes számra teljesülnie kell. Tehát elegendő bizonyítani, hogy létezik végtelen sok *x*, amelyek sem a (4), sem az (5) egyenleteket nem elégítik ki. Vagyis az egyenletek jobb oldala végtelen sok *x* esetén NEM PRÍM.

Tegyük fel, hogy (4)-ben *u*=*v*, ekkor igaz a következő:

(6)
$$6(6uv+u+v)+1\overset{u=v}{=}6(6u^2+2u)+1=36u^2+12u+1=(6u+1)^2\overset{(4)}{\Rightarrow}$$
$$\overset{(4)}{\Rightarrow}\quad 6K+1=(6u+1)^2-6x$$

Legyen továbbá $x=6^{2z+1}$, ahol *z>0* természetes szám, ekkor (6)-ból adódik, hogy

(7)
$$6K+1=(6u+1)^2-6x=(6u+1)^2-6\cdot 6^{2z+1}=(6u+1)^2-\left(6^{z+1}\right)^2=$$
$$=\left(6u+1+6^{z+1}\right)\left(6u+1-6^{z+1}\right)$$

Hasonló eredményre jutunk, ha feltesszük, hogy (5)-ben *u*=*v*:

(8)
$$6(6uv-u-v)+1\overset{u=v}{=}6(6u^2-2u)+1=36u^2-12u+1=(6u-1)^2\overset{(4)}{\Rightarrow}$$
$$\overset{(4)}{\Rightarrow}\quad 6K+1=(6u-1)^2-6x$$

Legyen továbbá $x=6^{2z+1}$, ahol *z>0* természetes szám, ekkor (8)-ból adódik, hogy

(9)
$$6K+1=(6u-1)^2-6x=(6u-1)^2-6\cdot 6^{2z+1}=(6u-1)^2-\left(6^{z+1}\right)^2=$$
$$=\left(6u-1+6^{z+1}\right)\left(6u-1-6^{z+1}\right)$$

(7) és (9) azonban ellentmond az (1a) feltételnek, amely szerint *6K+1* prímszám.

Az (1b) esetben hasonló a bizonyítás menete.
Vagyis (1b) esetén a [Dénes 2001]-beli 2. tétel szerint *k*-ra a következő egyenletek valamelyike teljesül:

(10) *k=6uv+u-v* (*u>0* és *v>0* természetes számok)

vagy

(11) *k=6uv-u+v* (*u>0* és *v>0* természetes számok)

Mivel (10) és (11) *u*-ra és *v*-re szimmetrikus, ezért elegendő a bizonyítást csak (10)-re elvégezni. Ekkor az (1b) indirekt feltételből és (10)-ből adódik, hogy

(12)
$$k=K+x=6uv+u-v\Rightarrow\ 6K-1=6(6uv+u-v-x)-1=\underbrace{6(6uv+u-v)-1}_{(1b)\text{ és }(10)\Rightarrow NEM\ PRÍM}-6x$$

(12)-nek minden *x>0* természetes számra teljesülnie kell. Tehát elegendő bizonyítani, hogy létezik végtelen sok *x*, amelyek a (12) egyenletet nem elégítik ki. Vagyis az egyenlet jobb oldala végtelen sok *x* esetén NEM PRÍM.

Dénes Tamás matematikus-kriptográfus email: tdenest@freemail.hu

Tegyük fel, hogy (12)-ben u=v, ekkor igaz a következő:

(13)
$$6(6uv+u-v)-1 \overset{u=v}{=} 36u^2-1=(6u-1)(6u+1) \overset{(12)}{\Rightarrow}$$
$$\overset{(12)}{\Rightarrow} \quad 6K-1=(6u-1)(6u+1)-6x$$

Legyen továbbá $6x=6^z(6u-1)$, ahol $z>0$ természetes szám, ekkor (13)-ból adódik, hogy

(14)
$$6K-1=(6u-1)(6u+1)-6^z(6u-1)=(6u-1)(6u+1-6^z)$$

(14) teljesül minden u-ra és z-re, amikor

(15)
$$6u+1 \rangle 6^z \quad \Rightarrow \quad u \rangle \frac{6^z-1}{6}=\frac{5(6^{z-1}+6^{z-2}+...+6+1)}{6}$$

(15) teljesül minden esetben, ha

(16)
$$u=(6^{z-1}+6^{z-2}+...+6+1) \quad \Rightarrow \quad 6x=6^z\left(6(6^{z-1}+6^{z-2}+...+6+1)-1\right) \quad \Rightarrow$$
$$\Rightarrow \quad x=6^{z-1}\left((6^z+6^{z-1}+...+6^2+6)-1\right)$$

(14)-(16) azonban ellentmond az (1b) feltételnek, amely szerint *6K-1* prímszám.

Q.E.D.

Hivatkozások

[Dénes 2001] Dénes, Tamás: Complementary prime-sieve, PUre Mathematics and Applications, Vol.12 (2001), No. 2, pp. 197-207
http://www.titoktan.hu/_raktar/_e_vilagi_gondolatok/PUMA-CPS.pdf
http://www.titoktan.hu/_raktar/_e_vilagi_gondolatok/KomplementerPrimszita.pdf

Dénes Tamás matematikus-kriptográfus email: tdenest@freemail.hu

1. Táblázat

k	*6k-1* ↓	*6k*	*6k+1* ↓	*6k+2*	*6k+3*	*6k+4*
0			1	2	3	4
1	**5**	6	**7**	8	9	10
2	**11**	12	**13**	14	15	16
3	**17**	18	**19**	20	21	22
4	**23**	24	25	26	27	28
5	**29**	30	**31**	32	33	34
6	35	36	**37**	38	39	40
7	**41**	42	**43**	44	45	46
8	**47**	48	49	50	51	52
9	**53**	54	55	56	57	58
10	**59**	60	**61**	62	63	64
11	65	66	**67**	68	69	70
12	**71**	72	**73**	74	75	76
13	77	78	**79**	80	81	82
14	**83**	84	85	86	87	88
15	**89**	90	91	92	93	94
16	95	96	**97**	98	99	100
17	**101**	102	**103**	104	105	106
18	**107**	108	**109**	110	111	112
19	**113**	114	115	116	117	118
20	119	120	121	122	123	124
21	125	126	127	128	129	130
22	**131**	132	133	134	135	136
23	**137**	138	**139**	140	141	142
24	143	144	145	146	147	148
25	**149**	150	**151**	152	153	154
26	155	156	157	158	159	160
27	161	162	**163**	164	165	166
28	**167**	168	169	170	171	172
29	**173**	174	175	176	177	178
30	**179**	180	**181**	182	183	184
31	185	186	187	188	189	190

Az Ikerprím sejtés bizonyítása

Dénes Tamás matematikus-kriptográfus email: tdenest@freemail.hu

1. Táblázat folytatása

k	*6k-1* ↓	*6k*	*6k+1* ↓	*6k+2*	*6k+3*	*6k+4*
32	**191**	192	**193**	194	195	196
33	**197**	198	**199**	200	201	202
…	…	…	…	…	…	…
137	**821**	822	**823**	824	825	826
138	**827**	828	**829**	830	831	832
…	…	…	…	…	…	…
247	**1.481**	1.482	**1.483**	1.484	1.485	1.486
248	**1.487**	1.488	**1.489**	1.490	1.491	1.492
…	…	…	…	…	…	…
312	**1.871**	1.872	**1.873**	1.874	1.875	1.876
313	**1.877**	1.878	**1.879**	1.880	1.881	1.882
…	…	…	…	…	…	…
347	**2.081**	2.082	**2.083**	2.084	2.085	2.086
348	**2.087**	2.088	**2.089**	2.090	2.091	2.092
…	…	…	…	…	…	…
542	**3.251**	3.252	**3.253**	3.254	3.255	3.256
543	**3.257**	3.258	**3.259**	3.260	3.261	3.262
…	…	…	…	…	…	…
577	**3.461**	3.462	**3.463**	3.464	3.465	3.466
578	**3.467**	3.468	**3.469**	3.470	3.471	3.472
…	…	…	…	…	…	…
942	**5.651**	5.652	**5.653**	5.654	5.655	5.656
943	**5.657**	5.658	**5.659**	5.660	5.661	5.662
…	…	…	…	…	…	…
1.572	**9.431**	9.432	**9.433**	9.434	9.435	9.436
1.573	**9.437**	9.438	**9.439**	9.440	9.441	9.442
…	…	…	…	…	…	…
3.502	**21.011**	21.012	**21.013**	21.014	21.015	21.016
3.503	**21.017**	21.018	**21.019**	21.020	21.021	21.022
…	…	…	…	…	…	…
975.237	**5.851.421**	*5.851.422*	**5.851.423**	*5.851.424*	*5.851.425*	*5.851.426*
975.238	**5.851.427**	*5.851.428*	**5.851.429**	*5.851.430*	*5.851.431*	*5.851.432*
…	…	…	…	…	…	…
K	***6K-1***		***6K+1***			
…	…	…	…	…	…	…
k=K+x	*6k-1=6(K+x)-1*		*6k+1=6(K+x)+1*			