Az Ikerprím sejtés bizonyítása

Dénes Tamás matematikus-kriptográfus
Email: tdenest@freemail.hu

Abstract

Jelen szerző 2001-ben bizonyított *komplementer prímszita tétele* szerint (lásd [Dénes 2001]), bármely *N=6k+1* alakú természetes szám, akkor és csak akkor összetett, ha *k=6uv+u+v*, vagy *k=6uv-u-v* alakú természetes szám. E tételre alapozva adunk indirekt bizonyítást az Ikerprím sejtésre, amelyet ezután Ikerprím tételnek nevezhetünk.

----- . -----

Ikerprím tétel

Végtelen sok *p*, *p+2* alakú prímpár van.

Bizonyítás (indirekt)

Tegyük fel, hogy az alábbi 1. táblázatban, amely [Dénes 2001]-szerint az 1. és 3. oszlopában tartalmazza az összes prímszámot, a *K*-ik sorban van az utolsó ikerprím pár, azaz

(1a)
$$6K-1,\,6K+1 \text{ prímek és } \forall k=K+x \quad (x \text{ term.szám}) \Rightarrow$$
$$\Rightarrow \quad \text{Ha } 6k-1 \text{ prímszám, akkor } 6k+1 \text{ NEM PRÍM}$$

vagy

(1b)
$$6K-1,\,6K+1 \text{ prímek és } \forall k=K+x \quad (x \text{ term.szám}) \Rightarrow$$
$$\Rightarrow \quad \text{Ha } 6k+1 \text{ prímszám, akkor } 6k-1 \text{ NEM PRÍM}$$

(1a) esetén a [Dénes 2001]-beli 2. tétel szerint *k*-ra a következő egyenletek valamelyike teljesül:

(2) $k=6uv+u+v$ ($u>0$ és $v>0$ természetes számok)

vagy

(3) $k=6uv-u-v$ ($u>0$ és $v>0$ természetes számok)

Ekkor az (1a) indirekt feltételből és (2)-ből adódik, hogy

(4)
$$k=K+x=6uv+u+v \Rightarrow 6K+1=6(6uv+u+v-x)+1=\underbrace{6(6uv+u+v)+1}_{(1a)\text{ és }(2)\Rightarrow NEM\ PRÍM}-6x$$

Az (1a) indirekt feltételből és (3)-ból adódik, hogy

(5)
$$k=K+x=6uv-u-v \Rightarrow 6K+1=6(6uv-u-v-x)+1=\underbrace{6(6uv-u-v)+1}_{(1a)\text{ és }(3)\Rightarrow NEM\ PRÍM}-6x$$

(4)-nek vagy (5)-nek minden *x>0* természetes számra teljesülnie kell. Tehát elegendő bizonyítani, hogy létezik végtelen sok *x*, amelyek sem a (4), sem az (5) egyenleteket nem elégítik ki. Vagyis az egyenletek jobb oldala végtelen sok *x* esetén NEM PRÍM.

Tegyük fel, hogy (4)-ben *u*=*v*, ekkor igaz a következő:

(6) $$6(6uv+u+v)+1 \overset{u=v}{=} 6(6u^2+2u)+1 = 36u^2+12u+1 = (6u+1)^2 \overset{(4)}{\Rightarrow}$$
$$\overset{(4)}{\Rightarrow} \quad 6K+1 = (6u+1)^2 - 6x$$

Legyen továbbá $x = 6^{2z+1}$, ahol *z>0* természetes szám, ekkor (6)-ból adódik, hogy

(7) $$6K+1 = (6u+1)^2 - 6x = (6u+1)^2 - 6\cdot 6^{2z+1} = (6u+1)^2 - \left(6^{z+1}\right)^2 =$$
$$= \left(6u+1+6^{z+1}\right)\left(6u+1-6^{z+1}\right)$$

Hasonló eredményre jutunk, ha feltesszük, hogy (5)-ben *u*=*v*:

(8) $$6(6uv-u-v)+1 \overset{u=v}{=} 6(6u^2-2u)+1 = 36u^2-12u+1 = (6u-1)^2 \overset{(4)}{\Rightarrow}$$
$$\overset{(4)}{\Rightarrow} \quad 6K+1 = (6u-1)^2 - 6x$$

Legyen továbbá $x = 6^{2z+1}$, ahol *z>0* természetes szám, ekkor (8)-ból adódik, hogy

(9) $$6K+1 = (6u-1)^2 - 6x = (6u-1)^2 - 6\cdot 6^{2z+1} = (6u-1)^2 - \left(6^{z+1}\right)^2 =$$
$$= \left(6u-1+6^{z+1}\right)\left(6u-1-6^{z+1}\right)$$

(7) és (9) azonban ellentmond az (1a) feltételnek, amely szerint *6K+1* prímszám.

Az (1b) esetben hasonló a bizonyítás menete.
Vagyis (1b) esetén a [Dénes 2001]-beli 2. tétel szerint *k*-ra a következő egyenletek valamelyike teljesül:

(10) *k=6uv+u-v* (*u>0* és *v>0* természetes számok)

vagy

(11) *k=6uv-u+v* (*u>0* és *v>0* természetes számok)

Mivel (10) és (11) *u*-ra és *v*-re szimmetrikus, ezért elegendő a bizonyítást csak (10)-re elvégezni. Ekkor az (1b) indirekt feltételből és (10)-ből adódik, hogy

(12) $$k=K+x=6uv+u-v \Rightarrow 6K-1=6(6uv+u-v-x)-1 = \underbrace{6(6uv+u-v)-1}_{(1b)\ \textit{és}\ (10) \Rightarrow NEM\ PRÍM} - 6x$$

(12)-nek minden *x>0* természetes számra teljesülnie kell. Tehát elegendő bizonyítani, hogy létezik végtelen sok *x*, amelyek a (12) egyenletet nem elégítik ki. Vagyis az egyenlet jobb oldala végtelen sok *x* esetén NEM PRÍM.

Dénes Tamás matematikus-kriptográfus email: tdenest@freemail.hu

Tegyük fel, hogy (12)-ben *u*=*v*, ekkor igaz a következő:

(13)
$$6(6uv+u-v)-1\overset{u=v}{=}36u^2-1=(6u-1)(6u+1)\overset{(12)}{\Rightarrow}$$
$$\overset{(12)}{\Rightarrow}\quad 6K-1=(6u-1)(6u+1)-6x$$

Legyen továbbá $6x=6^z(6u-1)$, ahol *z>0* természetes szám, ekkor (13)-ból adódik, hogy

(14)
$$6K-1=(6u-1)(6u+1)-6^z(6u-1)=(6u-1)(6u+1-6^z)$$

(14) teljesül minden *u*-ra és *z*-re, amikor

(15)
$$6u+1\rangle\, 6^z \quad\Rightarrow\quad u\,\rangle\, \frac{6^z-1}{6}=\frac{5(6^{z-1}+6^{z-2}+\ldots+6+1)}{6}$$

(15) teljesül minden esetben, ha

(16)
$$u=(6^{z-1}+6^{z-2}+\ldots+6+1)\quad\Rightarrow\quad 6x=6^z\left(6(6^{z-1}+6^{z-2}+\ldots+6+1)-1\right)\quad\Rightarrow$$
$$\Rightarrow\quad x=6^{z-1}\left((6^z+6^{z-1}+\ldots+6^2+6)-1\right)$$

(14)-(16) azonban ellentmond az (1b) feltételnek, amely szerint *6K-1* prímszám.

Q.E.D.

Hivatkozások

[Dénes 2001] Dénes, Tamás: Complementary prime-sieve, PUre Mathematics and Applications, Vol.12 (2001), No. 2, pp. 197-207

http://www.titoktan.hu/_raktar/_e_vilagi_gondolatok/PUMA-CPS.pdf

http://www.titoktan.hu/_raktar/_e_vilagi_gondolatok/KomplementerPrimszita.pdf

Dénes Tamás matematikus-kriptográfus email: tdenest@freemail.hu

1. Táblázat

k	*6k-1* ↓		*6k+1* ↓			
0			1	2	3	4
1	***5***	6	***7***	8	9	10
2	***11***	12	***13***	14	15	16
3	***17***	18	***19***	20	21	22
4	***23***	24	25	26	27	28
5	***29***	30	***31***	32	33	34
6	35	36	***37***	38	39	40
7	***41***	42	***43***	44	45	46
8	***47***	48	49	50	51	52
9	***53***	54	55	56	57	58
10	***59***	60	***61***	62	63	64
11	65	66	***67***	68	69	70
12	***71***	72	***73***	74	75	76
13	77	78	***79***	80	81	82
14	***83***	84	85	86	87	88
15	***89***	90	91	92	93	94
16	95	96	***97***	98	99	100
17	***101***	102	***103***	104	105	106
18	***107***	108	***109***	110	111	112
19	***113***	114	115	116	117	118
20	119	120	121	122	123	124
21	125	126	127	128	129	130
22	***131***	132	133	134	135	136
23	***137***	138	***139***	140	141	142
24	143	144	145	146	147	148
25	***149***	150	***151***	152	153	154
26	155	156	157	158	159	160
27	161	162	***163***	164	165	166
28	***167***	168	169	170	171	172
29	***173***	174	175	176	177	178
30	***179***	180	***181***	182	183	184
31	185	186	187	188	189	190

Dénes Tamás matematikus-kriptográfus email: tdenest@freemail.hu

1. Táblázat folytatása

k	*6k-1* ↓		*6k+1* ↓			
32	**191**	192	**193**	194	195	196
33	**197**	198	**199**	200	201	202
…	…	…	…	…	…	…
137	**821**	822	**823**	824	825	826
138	**827**	828	**829**	830	831	832
…	…	…	…	…	…	…
247	**1.481**	1.482	**1.483**	1.484	1.485	1.486
248	**1.487**	1.488	**1.489**	1.490	1.491	1.492
…	…	…	…	…	…	…
312	**1.871**	1.872	**1.873**	1.874	1.875	1.876
313	**1.877**	1.878	**1.879**	1.880	1.881	1.882
…	…	…	…	…	…	…
347	**2.081**	2.082	**2.083**	2.084	2.085	2.086
348	**2.087**	2.088	**2.089**	2.090	2.091	2.092
…	…	…	…	…	…	…
542	**3.251**	3.252	**3.253**	3.254	3.255	3.256
543	**3.257**	3.258	**3.259**	3.260	3.261	3.262
…	…	…	…	…	…	…
577	**3.461**	3.462	**3.463**	3.464	3.465	3.466
578	**3.467**	3.468	**3.469**	3.470	3.471	3.472
…	…	…	…	…	…	…
942	**5.651**	5.652	**5.653**	5.654	5.655	5.656
943	**5.657**	5.658	**5.659**	5.660	5.661	5.662
…	…	…	…	…	…	…
1.572	**9.431**	9.432	**9.433**	9.434	9.435	9.436
1.573	**9.437**	9.438	**9.439**	9.440	9.441	9.442
…	…	…	…	…	…	…
3.502	**21.011**	21.012	**21.013**	21.014	21.015	21.016
3.503	**21.017**	21.018	**21.019**	21.020	21.021	21.022
…	…	…	…	…	…	…
975.237	**5.851.421**	*5.851.422*	**5.851.423**	*5.851.424*	*5.851.425*	*5.851.426*
975.238	**5.851.427**	*5.851.428*	**5.851.429**	*5.851.430*	*5.851.431*	*5.851.432*
…	…	…	…	…	…	…
K	***6K-1***		***6K+1***			
…	…	…	…	…	…	…
k=K+x	*6k-1=6(K+x)-1*		*6k+1=6(K+x)+1*			