# Egymást követő négyzetszámok közötti prímszám létezésének bizonyítása

**Dénes Tamás** matematikus-kriptográfus
Email: tdenest@freemail.hu

**Abstract**

Jelen dolgozatban bizonyítjuk, hogy bármely $n$ természetes szám esetén az $\left[n^2,(n+1)^2\right]$ intervallumban mindig léteznek a $g_1, g_2, ..., g_t$ $6k \pm 1$ alakú természetes számok. Zárt formulát adunk az $n$-től függő $t$ értékre és a $g_1, g_2, ..., g_t$ értékekre. Majd a Dénes-féle Komplementer Prímszita tételre (Complementary Prime-sieve [Dénes 2001]) alapozva bebizonyítjuk, hogy a $g_1, g_2, ..., g_t$ természetes számok között bármely $n$ esetén, van legalább egy prímszám.

----- . -----

**1. TÉTEL**
Legyen $n$ tetszőleges természetes szám, ekkor mindig létezik $q$ prímszám, amelyre teljesül, hogy

$$n^2 \langle\, q \,\langle\, (n+1)^2 \tag{1}$$

**BIZONYÍTÁS**
Legyen az összes $n^2$-nél kisebb prímszám $p_1, p_2, ..., p_i, ..., p_r$,

$$p_1 \langle\, p_2 \,\langle\, ... \,\langle\, p_i \,\langle\, ... \,\langle\, p_r \,\langle\, n^2 \tag{2}$$

Mivel $(n+1)^2-n^2=2n+1$ ezért $n\geq 2$ esetén az $\left[n^2,(n+1)^2\right]$ intervallumban van legalább egy $g_x=6z\pm 1$ alakú természetes szám, ahol $x=1,2,3,\ldots,t$ és $z=1,2,3,\ldots$ Keressük meg az $n^2$ utáni első ilyen alakú ($g_1$) számot (lásd 1. ábra).

$$n = 2k \text{ és } k = 3s \ (s = 1,2,3,...) \ \Rightarrow \ n^2 = (2\cdot 3s)^2 = 6^2\cdot s^2 \Rightarrow g_1 = n^2+1 \to (6z+1) \tag{3a}$$

$$\begin{aligned} &n = 2k \text{ és } k = 3s-1 \ (s = 1,2,3,...) \ \Rightarrow \\ &\Rightarrow n^2 = (2(3s-1))^2 = 4(3s-1)^2 = 4(9s^2-6s+1) = 36s^2-24s+4 = \\ &= 6(6s^2-4s)+4 \Rightarrow g_1 = n^2+1 \to (6z-1) \end{aligned} \tag{3b}$$

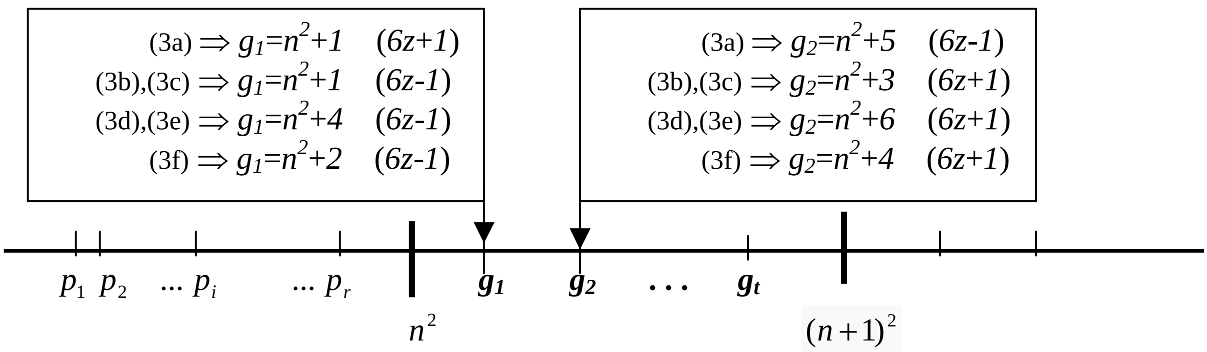
$$\begin{aligned} &n = 2k \text{ és } k = 3s-2 \ (s = 1,2,3,...) \ \Rightarrow \\ &\Rightarrow n^2 = (2(3s-2))^2 = 4(3s-2)^2 = 4(9s^2-12s+4) = 36s^2-48s+16 = \\ &= 6(6s^2-8s+2)+4 \Rightarrow g_1 = n^2+1 \to (6z-1) \end{aligned} \tag{3c}$$

**Dénes Tamás** matematikus-kriptográfus **email:** tdenest@freemail.hu

(3d)
$$n = 2k+1 \text{ és } k = 3s \ (s = 1,2,3,\ldots) \quad \Rightarrow \quad n^2 = (2\cdot 3s+1)^2 = 36s^2 + 12s + 1 =$$
$$= 6(6s^2+2s)+1 \Rightarrow g_1 = n^2 + 4 \rightarrow (6z-1)$$

(3e)
$$n = 2k+1 \text{ és } k = 3s-1 \ (s = 1,2,3,\ldots) \quad \Rightarrow$$
$$\Rightarrow n^2 = (2(3s-1)+1)^2 = 4(3s-1)^2 + 4(3s-1)+1 =$$
$$= 4(9s^2-6s+1)+12s-4+1 = 36s^2-24s+4+12s-4+1 = 36s^2-12s+1 =$$
$$= 6(6s^2-2s)+1 \Rightarrow g_1 = n^2+4 \rightarrow (6z-1)$$

(3f)
$$n = 2k+1 \text{ és } k = 3s-2 \ (s = 1,2,3,\ldots) \quad \Rightarrow$$
$$\Rightarrow n^2 = (2(3s-2)+1)^2 = 4(3s-2)^2 + 4(3s-2)+1 =$$
$$= 4(9s^2-12s+4)+12s-8+1 = 36s^2-48s+16+12s-8+1 = 36s^2-36s+6+3 =$$
$$= 6(6s^2-6s+1)+3 \Rightarrow g_1 = n^2+2 \rightarrow (6z-1)$$




**1. ábra**

A (3a)-(3f) levezetések szerint $g_1$ csak a (3a) esetben $6z+1$, a többi esetben mindig $6z-1$ alakú. Mivel az $\left[n^2,(n+1)^2\right]$ intervallumbeli $g_x=6z\pm 1$ alakú természetes számokat keressük, minden esetben létezik egy $g_2$ érték, ami a $g_1$-gyel ellentétes típusú. Vagyis $g_2$-re fennállnak a következő összefüggések:

(4a) $$\stackrel{(3a)}{\Rightarrow} \quad g_1 = n^2+1 \rightarrow (6z+1) \Rightarrow g_2 \rightarrow (6z-1) \Rightarrow g_2 = g_1+4 = n^2+5$$

(4b) $$\stackrel{(3b)}{\Rightarrow} \quad g_1 = n^2+1 \rightarrow (6z-1) \Rightarrow g_2 \rightarrow (6z+1) \Rightarrow g_2 = g_1+2 = n^2+3$$

(4c) $$\stackrel{(3c)}{\Rightarrow} \quad g_1 = n^2+1 \rightarrow (6z-1) \Rightarrow g_2 \rightarrow (6z+1) \Rightarrow g_2 = g_1+2 = n^2+3$$

(4d) $$\stackrel{(3d)}{\Rightarrow} \quad g_1 = n^2+4 \rightarrow (6z-1) \Rightarrow g_2 \rightarrow (6z+1) \Rightarrow g_2 = g_1+2 = n^2+6$$

**Dénes Tamás** matematikus-kriptográfus **email:** tdenest@freemail.hu

(4e) $$\overset{(3e)}{\Rightarrow} \quad g_1 = n^2 + 4 \to (6z-1) \Rightarrow g_2 \to (6z+1) \Rightarrow g_2 = g_1 + 2 = n^2 + 6$$

(4f) $$\overset{(3f)}{\Rightarrow} \quad g_1 = n^2 + 2 \to (6z-1) \Rightarrow g_2 \to (6z+1) \Rightarrow g_2 = g_1 + 2 = n^2 + 4$$

Az 1. táblázat néhány példát mutat be a $\boldsymbol{g_1}$ és $\boldsymbol{g_2}$ értékek kiszámítására. A táblázat 4. oszlopában találjuk $\boldsymbol{g_1}$, míg a 7. oszlopban a $\boldsymbol{g_2}$ kiszámítását, a (3a)-(3f) illetve a (4a)-(4f) összefüggések segítségével. A 6. és 9. oszlop tartalmazza a $\boldsymbol{g_1}$ és $\boldsymbol{g_2}$ értékeket (a ***bold*** kiemelés jelzi, ha $\boldsymbol{g_1}$ vagy $\boldsymbol{g_2}$ prímszám).

$g_1$-típusúnak nevezzük az $\left[n^2, (n+1)^2\right]$ intervallumbeli következő számtani sorozatot, a sorozat elemeinek számát $t_1$-el jelöljük:

(5) $$g_1,\ g_1+6,\ g_1+2 \cdot 6,\ \ldots,\ g_1+(t_1-1) \cdot 6$$

A (3a)-(3f) összefüggések segítségével meghatározhatjuk a $g_1$-típusú sorozat elemeinek számát ($t_1$).

(6a) $$\overset{(3a)}{\Rightarrow} \quad g_1 = n^2 + 1 \Rightarrow$$
$$\Rightarrow t_1 = \left[\frac{(n+1)^2 - (n^2+1)}{6} + \frac{1}{2}\right] = \left[\frac{n^2 + 2n + 1 - n^2 - 1 + 3}{6}\right] = \left[\frac{2n+3}{6}\right]$$

(6b) $$\overset{(3b)}{\Rightarrow} \quad g_1 = n^2 + 1 \Rightarrow$$
$$\Rightarrow t_1 = \left[\frac{(n+1)^2 - (n^2+1)}{6} + \frac{1}{2}\right] = \left[\frac{n^2 + 2n + 1 - n^2 - 1 + 3}{6}\right] = \left[\frac{2n+3}{6}\right]$$

(6c) $$\overset{(3c)}{\Rightarrow} \quad g_1 = n^2 + 1 \Rightarrow$$
$$\Rightarrow t_1 = \left[\frac{(n+1)^2 - (n^2+1)}{6} + \frac{1}{2}\right] = \left[\frac{n^2 + 2n + 1 - n^2 - 1 + 3}{6}\right] = \left[\frac{2n+3}{6}\right]$$

(6d) $$\overset{(3d)}{\Rightarrow} \quad g_1 = n^2 + 4 \Rightarrow$$
$$\Rightarrow t_1 = \left[\frac{(n+1)^2 - (n^2+4)}{6} + \frac{1}{2}\right] = \left[\frac{n^2 + 2n + 1 - n^2 - 4 + 3}{6}\right] = \left[\frac{n}{3}\right]$$

(6e) $$\overset{(3e)}{\Rightarrow} \quad g_1 = n^2 + 4 \Rightarrow$$
$$\Rightarrow t_1 = \left[\frac{(n+1)^2 - (n^2+4)}{6} + \frac{1}{2}\right] = \left[\frac{n^2 + 2n + 1 - n^2 - 4 + 3}{6}\right] = \left[\frac{n}{3}\right]$$

**Dénes Tamás** matematikus-kriptográfus **email: tdenest@freemail.hu**

(6f)
$$\overset{(3f)}{\Rightarrow} \quad g_1 = n^2 + 2 \Rightarrow$$
$$\Rightarrow t_1 = \left[\frac{(n+1)^2 - (n^2+2)}{6} + \frac{1}{2}\right] = \left[\frac{n^2+2n+1-n^2-2+3}{6}\right] = \left[\frac{2n+2}{6}\right] = \left[\frac{n+1}{3}\right]$$

$g_2$-típusúnak nevezzük az $\left[n^2,(n+1)^2\right]$ intervallumbeli következő számtani sorozatot, a sorozat elemeinek számát $t_2$-vel jelöljük:

(7) $$g_2,\ g_2+6,\ g_2+2\cdot 6,\ \ldots,\ g_2+(t_2-1)\cdot 6$$

A (4a)-(4f) összefüggések segítségével meghatározhatjuk a $g_2$-típusú sorozat elemeinek számát ($t_2$).

(8a)
$$\overset{(4a)}{\Rightarrow} \quad g_2 = n^2 + 5 \Rightarrow$$
$$\Rightarrow t_2 = \left[\frac{(n+1)^2 - (n^2+5)}{6} + \frac{1}{2}\right] = \left[\frac{n^2+2n+1-n^2-5+3}{6}\right] = \left[\frac{2n-1}{6}\right]$$

(8b)
$$\overset{(4b)}{\Rightarrow} \quad g_2 = n^2 + 3 \Rightarrow$$
$$\Rightarrow t_2 = \left[\frac{(n+1)^2 - (n^2+3)}{6} + \frac{1}{2}\right] = \left[\frac{n^2+2n+1-n^2-3+3}{6}\right] = \left[\frac{2n+1}{6}\right]$$

(8c)
$$\overset{(4c)}{\Rightarrow} \quad g_2 = n^2 + 3 \Rightarrow$$
$$\Rightarrow t_2 = \left[\frac{(n+1)^2 - (n^2+3)}{6} + \frac{1}{2}\right] = \left[\frac{n^2+2n+1-n^2-3+3}{6}\right] = \left[\frac{2n+1}{6}\right]$$

(8d)
$$\overset{(4d)}{\Rightarrow} \quad g_2 = n^2 + 6 \Rightarrow$$
$$\Rightarrow t_2 = \left[\frac{(n+1)^2 - (n^2+6)}{6} + \frac{1}{2}\right] = \left[\frac{n^2+2n+1-n^2-6+3}{6}\right] = \left[\frac{n-1}{3}\right]$$

(8e)
$$\overset{(4e)}{\Rightarrow} \quad g_2 = n^2 + 6 \Rightarrow$$
$$\Rightarrow t_2 = \left[\frac{(n+1)^2 - (n^2+6)}{6} + \frac{1}{2}\right] = \left[\frac{n^2+2n+1-n^2-6+3}{6}\right] = \left[\frac{n-1}{3}\right]$$

**Dénes Tamás** matematikus-kriptográfus **email:** **tdenest@freemail.hu**

(8f) $$\overset{(4f)}{\Rightarrow} \quad g_2 = n^2 + 4 \Rightarrow$$
$$\Rightarrow t_2 = \left[ \frac{(n+1)^2 - (n^2+4)}{6} + \frac{1}{2} \right] = \left[ \frac{n^2 + 2n + 1 - n^2 - 4 + 3}{6} \right] = \left[ \frac{n}{3} \right]$$

A (6a)-(6f)-beli $t_1$ és a (8a)-(8f)-beli $t_2$ értékek páronkénti összeadásával kapjuk rendre a $\lfloor n^2,(n+1)^2 \rfloor$ intervallumbeli $g_x$=$6z\pm1$ alakú elemek (lásd 1. ábra) $t$ számát (lásd 1. táblázat 10. oszlop).

(9a) $$\overset{(6a),(8a)}{\Rightarrow} \quad t = t_1 + t_2 = \left[ \frac{2n+3}{6} \right] + \left[ \frac{2n-1}{6} \right] = \left[ \frac{2n+1}{3} \right]$$

(9b) $$\overset{(6b),(8b)}{\Rightarrow} \quad t = t_1 + t_2 = \left[ \frac{2n+3}{6} \right] + \left[ \frac{2n+1}{6} \right] = \left[ \frac{2n+2}{3} \right]$$

(9c) $$\overset{(6c),(8c)}{\Rightarrow} \quad t = t_1 + t_2 = \left[ \frac{2n+3}{6} \right] + \left[ \frac{2n+1}{6} \right] = \left[ \frac{2n+2}{3} \right]$$

(9d) $$\overset{(6d),(8d)}{\Rightarrow} \quad t = t_1 + t_2 = \left[ \frac{n}{3} \right] + \left[ \frac{n-1}{3} \right] = \left[ \frac{2n-1}{3} \right]$$

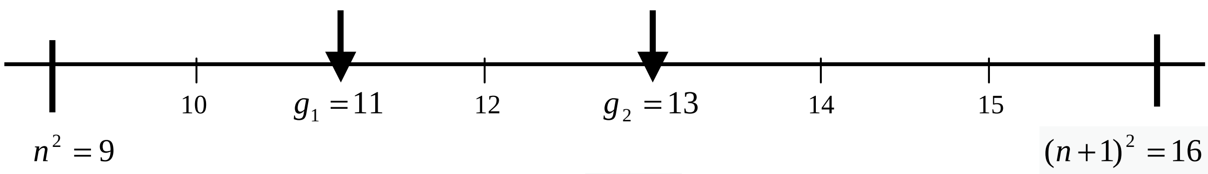
(9e) $$\overset{(6e),(8e)}{\Rightarrow} \quad t = t_1 + t_2 = \left[ \frac{n}{3} \right] + \left[ \frac{n-1}{3} \right] = \left[ \frac{2n-1}{3} \right]$$

(9f) $$\overset{(6f),(8f)}{\Rightarrow} \quad t = t_1 + t_2 = \left[ \frac{n+1}{3} \right] + \left[ \frac{n}{3} \right] = \left[ \frac{2n+1}{3} \right]$$

A fentiek alapján a [Dénes 2001] 1. tételből következik, hogy az $\lfloor n^2,(n+1)^2 \rfloor$ intervallumban mindig létezik $t$ számú (lásd (9a)-(9f)) $g_1,\dots,g_t$ $6z\pm1$ alakú érték és csak ezek között lehetnek az intervallumbeli prímszámok (az $n=3,4,\dots,10$ eseteket mutatják be a 2-9. ábrák, az ábrákon a nyilak a megfelelő $g_i$ értékeket jelölik, vastag nyillal jelöltük a prímszám $g_i$ értékeket).

**Példák**

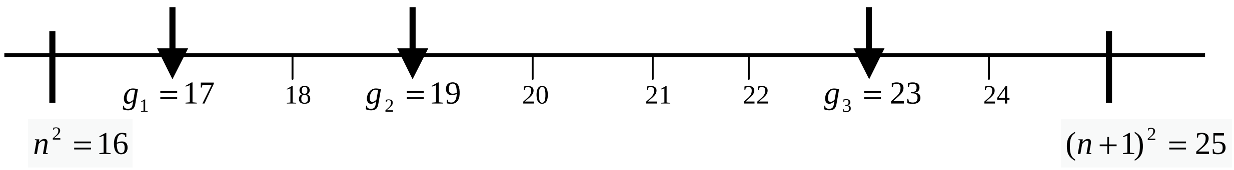
$$n = 3 \overset{(9f)}{\Rightarrow} \quad t = \left[ \frac{2 \cdot 3 + 1}{3} \right] = 2$$




**2. ábra**

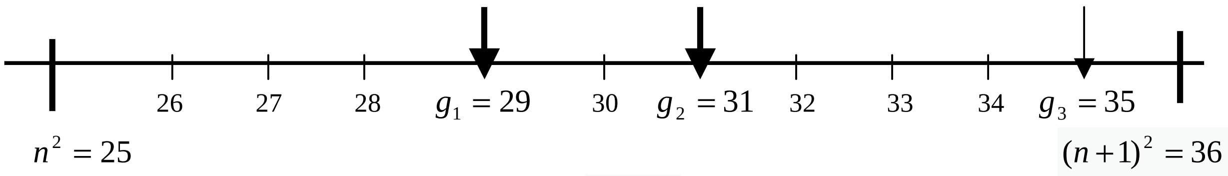
**Dénes Tamás** matematikus-kriptográfus **email: tdenest@freemail.hu**

$$n = 4 \overset{(9b)}{\Rightarrow} t = \left[\frac{2 \cdot 4 + 2}{3}\right] = 3$$



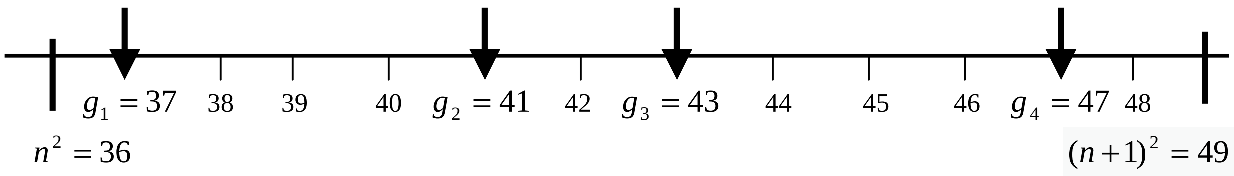

**3. ábra**

$$n = 5 \overset{(9e)}{\Rightarrow} t = \left[\frac{2 \cdot 5 - 1}{3}\right] = 3$$



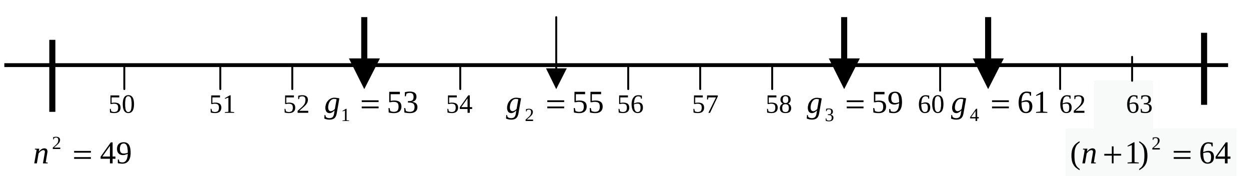

**4. ábra**

$$n = 6 \overset{(9a)}{\Rightarrow} t = \left[\frac{2 \cdot 6 + 1}{3}\right] = 4$$




**5. ábra**

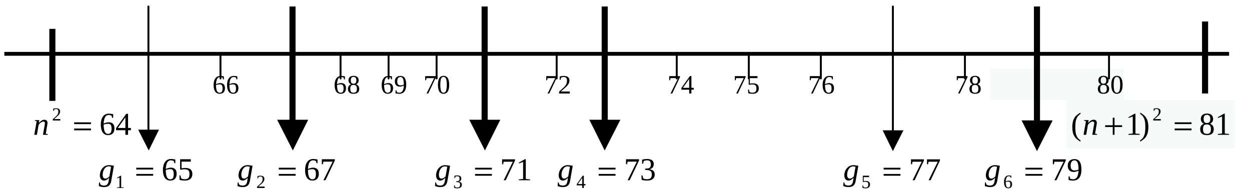
$$n = 7 \overset{(9d)}{\Rightarrow} t = \left[\frac{2 \cdot 7 - 1}{3}\right] = 4$$




**6. ábra**

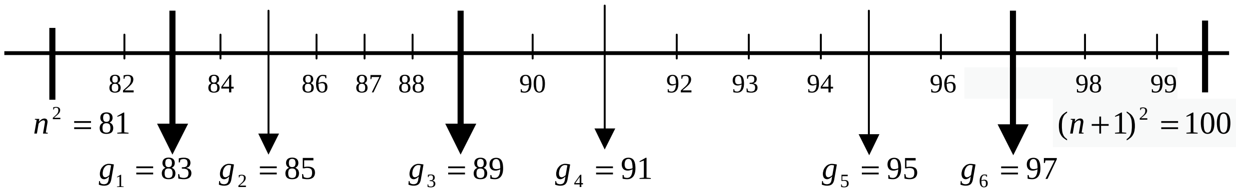
**Dénes Tamás** matematikus-kriptográfus **email: tdenest@freemail.hu**

$$n = 8 \overset{(9c)}{\Rightarrow} t = \left[\frac{2\cdot 8+2}{3}\right] = 6$$



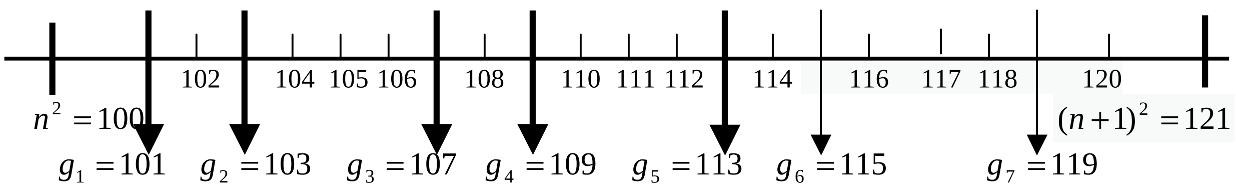

**7. ábra**

$$n = 9 \overset{(9f)}{\Rightarrow} t = \left[\frac{2\cdot 9+1}{3}\right] = 6$$




**8. ábra**

$$n = 10 \overset{(9b)}{\Rightarrow} t = \left[\frac{2\cdot 10+2}{3}\right] = 7$$




**9. ábra**

### *A bizonyítás folytatása (indirekt)*

Indirekt feltételként, az (1) állítással ellentétben, tegyük fel, hogy bármely *n* természetes szám esetén az (5) és (7) típusú $g_1,\ldots,g_t$ értékek egyike sem prímszám. Ekkor a (3a)-(3f) összefüggések alapján, a [Dénes 2001] 2. tétel miatt mindegyik $g_x$–re ($x=1,2,\ldots,t$) teljesülnie kell a következő egyenlőségek valamelyikének:

(10a) $\forall n \text{ és } g_x = 6z+1 \ \ (x=1,2,\ldots,t) \ \Rightarrow \ z = 6uv+u+v \ \ (u,v=1,2,3,\ldots)$

(10b) $\forall n \text{ és } g_x = 6z+1 \ \ (x=1,2,\ldots,t) \ \Rightarrow \ z = 6uv-u-v \ \ (u,v=1,2,3,\ldots)$

(10c) $\forall n \text{ és } g_x = 6z-1 \ \ (x=1,2,\ldots,t) \ \Rightarrow \ z = 6uv+u-v \ \ (u,v=1,2,3,\ldots)$

(10d) $\forall n \text{ és } g_x = 6z-1 \ \ (x=1,2,\ldots,t) \ \Rightarrow \ z = 6uv-u+v \ \ (u,v=1,2,3,\ldots)$

**Dénes Tamás** matematikus-kriptográfus **email:** tdenest@freemail.hu

Megmutatjuk, hogy az összes lehetséges $n$ értéket előállító (3a)-(3f) esetekhez tartozó $g_x$ értékek ($1 \le x \le t$) esetén (lásd 1. ábra és (5), (7)) az indirekt állítás mindig ellentmondásra vezet.

(5) és (7) alapján a $g_x$ ($x=1,2,\ldots,t$) értékek a következő sorozatba rendezhetők:

(11)
$$g_1, g_2, g_3 = g_1 + 6, g_4 = g_2 + 6, \ldots, g_x = g_1 + \left[\frac{x-1}{2}\right]6, g_{x+1} = g_2 + \left[\frac{x-2}{2}\right]6, \ldots, g_t \Rightarrow$$
$$\Rightarrow g_1, g_2, g_3 = g_1 + 6, g_4 = g_2 + 6, \ldots, g_x = g_1 + 3(x-1), g_{x+1} = g_2 + 3(x-2), \ldots, g_t$$

A következőkben sorra vesszük az összes (3a)-(3f) és (10a)-(10d) eset párosítást (összesen 6·4=24 eset), amelyek lefedik az összes $n$ természetes számot. Vagyis felírjuk a sorozat $g_x$ és $g_{x+1}$ elemeire a megfelelő (10a)-(10d) összefüggéseket.

**(3a) - (10a) – (10c) eset:**

(12a)
$$g_x = g_1 + 3(x-1) \overset{(3a)}{=} n^2 + 1 + 3(x-1) \overset{(10a)}{=} 6(6uv + u + v) + 1$$
$$g_{x+1} = g_2 + 3(x-2) \overset{(3a)}{=} n^2 + 5 + 3(x-2) \overset{(10c)}{=} 6(6uv + u - v) - 1$$

(12b)
$$\overset{(12a)}{\Rightarrow} \frac{n^2 + 3(x-1)}{6} = v(6u+1) + u \Rightarrow \quad v = \frac{n^2 + 3(x-1) - 6u}{6(6u+1)} \overset{(12a)}{\Rightarrow}$$
$$\overset{(12a)}{\Rightarrow} \frac{n^2 + 6 + 3(x-2)}{6} = 6uv + u - v \quad \Rightarrow$$
$$\Rightarrow \frac{n^2 + 6 + 3(x-2)}{6} = 6u\frac{n^2 + 3(x-1) - 6u}{6(6u+1)} + u - \frac{n^2 + 3(x-1) - 6u}{6(6u+1)} =$$
$$= \frac{6un^2 + 18u(x-1) - 36u^2 + 36u^2 + 6u - n^2 - 3(x-1) + 6u}{6(6u+1)} =$$
$$= \frac{6un^2 + 18u(x-1) + 12u - n^2 - 3(x-1)}{6(6u+1)} \quad \Rightarrow$$
$$\Rightarrow \left(n^2 + 6 + 3(x-2)\right)(6u+1) = 6un^2 + 18u(x-1) + 12u - n^2 - 3(x-1) \quad \Rightarrow$$
$$\Rightarrow 6un^2 + 18ux + n^2 + 3x = 6un^2 + 18ux - 6u - n^2 - 3x + 3 \quad \Rightarrow$$
$$\Rightarrow 2n^2 + 6x + 6u - 3 = 0 \quad \Rightarrow \quad u = \frac{-2n^2 - 6x + 3}{6} \langle 0$$

$u$ definíció szerint természetes szám (lásd (10a)-(10d)), ennek azonban a (12a)-(12b) levezetés eredménye ellentmond!

**Dénes Tamás** matematikus-kriptográfus **email: tdenest@freemail.hu**

**(3a) - (10a) – (10d) eset:**

(13a)
$$g_x = g_1 + 3(x-1) \overset{(3a)}{=} n^2 + 1 + 3(x-1) \overset{(10a)}{=} 6(6uv + u + v) + 1$$
$$g_{x+1} = g_2 + 3(x-2) \overset{(3a)}{=} n^2 + 5 + 3(x-2) \overset{(10d)}{=} 6(6uv - u + v) - 1$$

$$\overset{(13a)}{\Rightarrow} \quad \frac{n^2 + 3(x-1)}{6} = v(6u+1) + u \Rightarrow \quad v = \frac{n^2 + 3(x-1) - 6u}{6(6u+1)} \quad \overset{(13a)}{\Rightarrow}$$
$$\overset{(13a)}{\Rightarrow} \quad \frac{n^2 + 6 + 3(x-2)}{6} = 6uv - u + v \quad \Rightarrow$$
$$\Rightarrow \quad \frac{n^2 + 6 + 3(x-2)}{6} = 6u\frac{n^2 + 3(x-1) - 6u}{6(6u+1)} - u + \frac{n^2 + 3(x-1) - 6u}{6(6u+1)} =$$
$$= \frac{6un^2 + 18u(x-1) - 36u^2 - 36u^2 - 6u + n^2 + 3(x-1) - 6u}{6(6u+1)} =$$

(13b)
$$= \frac{6un^2 + 18u(x-1) - 72u^2 - 12u + n^2 + 3(x-1)}{6(6u+1)} \quad \Rightarrow$$
$$\Rightarrow \quad \left(n^2 + 6 + 3(x-2)\right)(6u+1) = 6un^2 + 18ux - 30u - 72u^2 + n^2 + 3x - 3 \quad \Rightarrow$$
$$\Rightarrow \quad 6un^2 + 18ux + n^2 + 3x = 6un^2 + 18ux - 30u - 72u^2 + n^2 + 3x - 3 \quad \Rightarrow$$
$$\Rightarrow \quad 72u^2 + 30u + 3 = 0 \quad \Rightarrow \quad 24u^2 + 10u + 1 = 0 \quad \Rightarrow$$
$$\Rightarrow \quad u_{1,2} = \frac{-10 \pm \sqrt{100 - 96}}{48} = \frac{-10 \pm 2}{48} \langle\, 0$$

*u* természetes szám (lásd (10a)-(10d)), ennek azonban a (13a)-(13b) levezetés eredménye ellentmond!

**Dénes Tamás** matematikus-kriptográfus **email: tdenest@freemail.hu**

**(3a) - (10b) – (10c) eset:**

(14a)
$$g_x = g_1 + 3(x-1) \overset{(3a)}{=} n^2 + 1 + 3(x-1) \overset{(10b)}{=} 6(6uv - u - v) + 1$$
$$g_{x+1} = g_2 + 3(x-2) \overset{(3a)}{=} n^2 + 5 + 3(x-2) \overset{(10c)}{=} 6(6uv + u - v) - 1$$

$$\overset{(14a)}{\Rightarrow} \quad \frac{n^2 + 3(x-1)}{6} = v(6u-1) - u \Rightarrow \quad v = \frac{n^2 + 3(x-1) + 6u}{6(6u-1)} \quad \overset{(14a)}{\Rightarrow}$$
$$\overset{(14a)}{\Rightarrow} \quad \frac{n^2 + 6 + 3(x-2)}{6} = 6uv + u - v \quad \Rightarrow$$
$$\Rightarrow \quad \frac{n^2 + 6 + 3(x-2)}{6} = 6u\frac{n^2 + 3(x-1) + 6u}{6(6u-1)} + u - \frac{n^2 + 3(x-1) + 6u}{6(6u-1)} =$$
$$= \frac{6un^2 + 18u(x-1) + 36u^2 + 36u^2 - 6u - n^2 - 3(x-1) - 6u}{6(6u-1)} =$$

(14b)
$$= \frac{6un^2 + 18u(x-1) + 72u^2 - 12u - n^2 - 3(x-1)}{6(6u-1)} \quad \Rightarrow$$
$$\Rightarrow \quad \left(n^2 + 6 + 3(x-2)\right)(6u-1) = 6un^2 + 18ux - 30u + 72u^2 - n^2 - 3x + 3 \quad \Rightarrow$$
$$\Rightarrow \quad 6un^2 + 18ux - n^2 - 3x = 6un^2 + 18ux - 30u + 72u^2 - n^2 - 3x + 3 \quad \Rightarrow$$
$$\Rightarrow \quad 72u^2 - 30u + 3 = 0 \quad \Rightarrow \quad 24u^2 - 10u + 1 = 0 \quad \Rightarrow$$
$$\Rightarrow \quad u_{1,2} = \frac{10 \pm \sqrt{100 - 96}}{48} = \frac{10 \pm 2}{48} \langle 1$$

$u$ természetes szám (lásd (10a)-(10d)), ennek azonban a (14a)-(14b) levezetés eredménye ellentmond!

**Dénes Tamás** matematikus-kriptográfus **email: tdenest@freemail.hu**

**(3a) - (10b) – (10d) eset:**

(15a)
$$g_x = g_1 + 3(x-1) \overset{(3a)}{=} n^2 + 1 + 3(x-1) \overset{(10b)}{=} 6(6uv - u - v) + 1$$
$$g_{x+1} = g_2 + 3(x-2) \overset{(3a)}{=} n^2 + 5 + 3(x-2) \overset{(10d)}{=} 6(6uv - u + v) - 1$$

$$\overset{(15a)}{\Rightarrow} \quad \frac{n^2 + 3(x-1)}{6} = v(6u-1) - u \Rightarrow \quad v = \frac{n^2 + 3(x-1) + 6u}{6(6u-1)} \quad \overset{(15a)}{\Rightarrow}$$
$$\overset{(15a)}{\Rightarrow} \quad \frac{n^2 + 6 + 3(x-2)}{6} = 6uv - u + v \quad \Rightarrow$$
$$\Rightarrow \quad \frac{n^2 + 6 + 3(x-2)}{6} = 6u\frac{n^2 + 3(x-1) + 6u}{6(6u-1)} - u + \frac{n^2 + 3(x-1) + 6u}{6(6u-1)} =$$

(15b)
$$= \frac{6un^2 + 18ux - 6u + n^2 + 3x - 3}{6(6u-1)} \quad \Rightarrow$$
$$\Rightarrow \quad \left(n^2 + 6 + 3(x-2)\right)(6u-1) = 6un^2 + 18ux - 6u + n^2 + 3x - 3 \quad \Rightarrow$$
$$\Rightarrow \quad 6un^2 + 18ux - n^2 - 3x = 6un^2 + 18ux - 6u + n^2 + 3x - 3 \quad \Rightarrow$$
$$\Rightarrow \quad 6u = 2n^2 + 6x - 3 \quad \Rightarrow \quad u = \frac{2n^2 + 6x - 3}{6} = x + \underbrace{\frac{n^2}{3} - \frac{1}{2}}_{sosem\ egész\ szám}$$

*u* természetes szám (lásd (10a)-(10d)), ennek azonban a (15a)-(15b) levezetés eredménye ellentmond!

**Dénes Tamás** matematikus-kriptográfus **email: tdenest@freemail.hu**

**(3b),(3c) - (10c) – (10a) eset:**

(16a)
$$g_x = g_1 + 3(x-1) \overset{(3b),(3c)}{=} n^2 + 1 + 3(x-1) \overset{(10c)}{=} 6(6uv + u - v) - 1$$
$$g_{x+1} = g_2 + 3(x-2) \overset{(3b),(3c)}{=} n^2 + 3 + 3(x-2) \overset{(10a)}{=} 6(6uv + u + v) + 1$$

$$\overset{(16a)}{\Rightarrow} \quad \frac{n^2 + 3(x-1) + 2}{6} = v(6u-1) + u \Rightarrow \quad v = \frac{n^2 + 3(x-1) + 2 - 6u}{6(6u-1)} \quad \overset{(16a)}{\Rightarrow}$$

$$\overset{(16a)}{\Rightarrow} \quad \frac{n^2 + 2 + 3(x-2)}{6} = 6uv + u + v \quad \Rightarrow$$

(16b)
$$\Rightarrow \quad \frac{n^2 + 2 + 3(x-2)}{6} = 6u\frac{n^2 + 3(x-1) + 2 - 6u}{6(6u-1)} + u + \frac{n^2 + 3(x-1) + 2 - 6u}{6(6u-1)} =$$

$$= \frac{6un^2 + 18u(x-1) + 12u - 36u^2 + 36u^2 - 6u + n^2 + 3(x-1) + 2 - 6u}{6(6u-1)} =$$

$$= \frac{6un^2 + 18ux - 12u + 3x + n^2 - 1}{6(6u-1)}$$

$$\overset{(16b)}{\Rightarrow} \quad \left(n^2 + 2 + 3(x-2)\right)(6u-1) = 6un^2 + 18ux - 12u + 3x + n^2 - 1 \quad \Rightarrow$$

(16c)
$$\Rightarrow \quad 6un^2 + 18ux - 24u - n^2 - 3x + 4 = 6un^2 + 18ux - 12u + 3x + n^2 - 1 \quad \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \quad 2n^2 + 12u + 3x - 3 = 0 \quad \Rightarrow \quad u = \frac{3 - 2n^2 - 3x}{12} \langle\, 0$$

*u* definíció szerint természetes szám (lásd (10a)-(10d)), ennek azonban a (16a)-(16c) levezetés eredménye ellentmond!

**Dénes Tamás** matematikus-kriptográfus **email:** **tdenest@freemail.hu**

**(3b),(3c) - (10c) – (10b) eset:**

(17a)
$$g_x = g_1 + 3(x-1) \overset{(3b),(3c)}{=} n^2 + 1 + 3(x-1) \overset{(10c)}{=} 6(6uv + u - v) - 1$$
$$g_{x+1} = g_2 + 3(x-2) \overset{(3b),(3c)}{=} n^2 + 3 + 3(x-2) \overset{(10b)}{=} 6(6uv - u - v) + 1$$

$$\overset{(17a)}{\Rightarrow} \quad \frac{n^2 + 3(x-1) + 2}{6} = v(6u-1) + u \Rightarrow \quad v = \frac{n^2 + 3(x-1) + 2 - 6u}{6(6u-1)} \quad \overset{(17a)}{\Rightarrow}$$
$$\overset{(17a)}{\Rightarrow} \quad \frac{n^2 + 2 + 3(x-2)}{6} = 6uv - u - v \quad \Rightarrow$$

(17b)
$$\Rightarrow \quad \frac{n^2 + 2 + 3(x-2)}{6} = 6u\frac{n^2 + 3(x-1) + 2 - 6u}{6(6u-1)} - u - \frac{n^2 + 3(x-1) + 2 - 6u}{6(6u-1)} =$$
$$= \frac{6un^2 + 18u(x-1) + 12u - 36u^2 - 36u^2 + 6u - n^2 - 3(x-1) - 2 + 6u}{6(6u-1)} =$$
$$= \frac{6un^2 + 18ux + 6u - 72u^2 - 3x - n^2 + 1}{6(6u-1)}$$

(17c)
$$\overset{(17b)}{\Rightarrow} \quad \left(n^2 + 2 + 3(x-2)\right)(6u-1) = 6un^2 + 18ux + 6u - 72u^2 - 3x - n^2 + 1 \quad \Rightarrow$$
$$\Rightarrow \quad 6un^2 + 18ux - 24u - n^2 - 3x + 4 = 6un^2 + 18ux + 6u - 72u^2 - 3x - n^2 + 1 \quad \Rightarrow$$
$$\Rightarrow \quad 72u^2 - 30u - 1 = 0 \quad \Rightarrow \quad u_{1,2} = \frac{30 \pm \sqrt{30^2 + 4 \cdot 72}}{2 \cdot 72} = \underbrace{\frac{15 \pm \sqrt{15^2 + 72}}{72}}_{nem\ \ egész\ \ szám}$$

*u* definíció szerint természetes szám (lásd (10a)-(10d)), ennek azonban a (17a)-(17c) levezetés eredménye ellentmond!

**Dénes Tamás** matematikus-kriptográfus **email: tdenest@freemail.hu**

**(3b),(3c) - (10d) – (10a) eset:**

(18a)
$$g_x = g_1 + 3(x-1) \overset{(3b),(3c)}{=} n^2 + 1 + 3(x-1) \overset{(10d)}{=} 6(6uv - u + v) - 1$$
$$g_{x+1} = g_2 + 3(x-2) \overset{(3b),(3c)}{=} n^2 + 3 + 3(x-2) \overset{(10a)}{=} 6(6uv + u + v) + 1$$

$$\overset{(18a)}{\Rightarrow} \frac{n^2 + 3(x-1) + 2}{6} = v(6u+1) - u \Rightarrow \quad v = \frac{n^2 + 3(x-1) + 2 + 6u}{6(6u+1)} \quad \overset{(18a)}{\Rightarrow}$$
$$\overset{(18a)}{\Rightarrow} \frac{n^2 + 2 + 3(x-2)}{6} = 6uv + u + v \quad \Rightarrow$$

(18b)
$$\Rightarrow \frac{n^2 + 2 + 3(x-2)}{6} = 6u\frac{n^2 + 3(x-1) + 2 + 6u}{6(6u+1)} + u + \frac{n^2 + 3(x-1) + 2 + 6u}{6(6u+1)} =$$
$$= \frac{6un^2 + 18u(x-1) + 12u + 36u^2 + 36u^2 + 6u + n^2 + 3(x-1) + 2 + 6u}{6(6u+1)} =$$
$$= \frac{6un^2 + 18ux + 6u + 72u^2 + 3x + n^2 - 1}{6(6u+1)}$$

$$\overset{(18b)}{\Rightarrow} \left(n^2 + 2 + 3(x-2)\right)(6u+1) = 6un^2 + 18ux + 6u + 72u^2 + 3x + n^2 - 1 \quad \Rightarrow$$

(18c)
$$\Rightarrow \quad 6un^2 + 18ux - 24u + n^2 + 3x - 4 = 6un^2 + 18ux + 6u + 72u^2 + 3x + n^2 - 1 \quad \Rightarrow$$
$$\Rightarrow \quad 24u^2 + 10u + 1 = 0 \quad \Rightarrow \quad u_{1,2} = \frac{-10 \pm \sqrt{100-96}}{48} = \frac{-10 \pm 2}{48} \langle \, 0$$

*u* definíció szerint természetes szám (lásd (10a)-(10d)), ennek azonban a (18a)-(18c) levezetés eredménye ellentmond!

**Dénes Tamás** matematikus-kriptográfus **email: tdenest@freemail.hu**

**(3b),(3c) - (10d) – (10b) eset:**

(19a)
$$g_x = g_1 + 3(x-1) \overset{(3b),(3c)}{=} n^2 + 1 + 3(x-1) \overset{(10d)}{=} 6(6uv - u + v) - 1$$
$$g_{x+1} = g_2 + 3(x-2) \overset{(3b),(3c)}{=} n^2 + 3 + 3(x-2) \overset{(10b)}{=} 6(6uv - u - v) + 1$$

$$\overset{(19a)}{\Rightarrow} \quad \frac{n^2 + 3(x-1) + 2}{6} = v(6u+1) - u \Rightarrow \quad v = \frac{n^2 + 3(x-1) + 2 + 6u}{6(6u+1)} \quad \overset{(19a)}{\Rightarrow}$$

$$\overset{(19a)}{\Rightarrow} \quad \frac{n^2 + 2 + 3(x-2)}{6} = 6uv - u - v \quad \Rightarrow$$

(19b)
$$\Rightarrow \quad \frac{n^2 + 2 + 3(x-2)}{6} = 6u\frac{n^2 + 3(x-1) + 2 + 6u}{6(6u+1)} - u - \frac{n^2 + 3(x-1) + 2 + 6u}{6(6u+1)} =$$
$$= \frac{6un^2 + 18u(x-1) + 12u + 36u^2 - 36u^2 - 6u - n^2 - 3(x-1) - 2 - 6u}{6(6u+1)} =$$
$$= \frac{6un^2 + 18ux - 18u - 3x - n^2 + 1}{6(6u+1)}$$

(19c)
$$\overset{(19b)}{\Rightarrow} \quad \left(n^2 + 2 + 3(x-2)\right)(6u+1) = 6un^2 + 18ux - 18u - 3x - n^2 + 1 \quad \Rightarrow$$
$$\Rightarrow \quad 6un^2 + 18ux - 24u + n^2 + 3x - 4 = 6un^2 + 18ux + 6u + 72u^2 + 3x + n^2 - 1 \quad \Rightarrow$$
$$\Rightarrow \quad 2n^2 + 6x - 5 = 6u \quad \Rightarrow \quad u = \frac{2n^2 + 6x - 5}{6} = \underbrace{\frac{2n^2 - 5}{6}}_{sosem\ \ egész\ \ szám} + x$$

*u* definíció szerint természetes szám (lásd (10a)-(10d)), ennek azonban a (19a)-(19c) levezetés eredménye ellentmond!

**Dénes Tamás** matematikus-kriptográfus **email:** tdenest@freemail.hu

**(3d),(3e) - (10c) – (10a) eset:**

(20a)
$$g_x = g_1 + 3(x-1) \overset{(3d),(3e)}{=} n^2 + 4 + 3(x-1) \overset{(10c)}{=} 6(6uv + u - v) - 1$$
$$g_{x+1} = g_2 + 3(x-2) \overset{(3d),(3e)}{=} n^2 + 6 + 3(x-2) \overset{(10a)}{=} 6(6uv + u + v) + 1$$

(20b)
$$\overset{(20a)}{\Rightarrow} \quad \frac{n^2 + 3(x-1) + 5}{6} = v(6u-1) + u \Rightarrow \quad v = \frac{n^2 + 3(x-1) + 5 - 6u}{6(6u-1)} \quad \overset{(20a)}{\Rightarrow}$$
$$\overset{(20a)}{\Rightarrow} \quad \frac{n^2 + 5 + 3(x-2)}{6} = 6uv + u + v \quad \Rightarrow$$
$$\Rightarrow \quad \frac{n^2 + 5 + 3(x-2)}{6} = 6u\frac{n^2 + 3(x-1) + 5 - 6u}{6(6u-1)} + u + \frac{n^2 + 3(x-1) + 5 - 6u}{6(6u-1)} =$$
$$= \frac{6un^2 + 18u(x-1) + 30u - 36u^2 + 36u^2 - 6u + n^2 + 3(x-1) + 5 - 6u}{6(6u-1)} =$$
$$= \frac{6un^2 + 18ux + 3x + n^2 + 2}{6(6u-1)}$$

(20c)
$$\overset{(20b)}{\Rightarrow} \quad \left(n^2 + 5 + 3(x-2)\right)(6u-1) = 6un^2 + 18ux + 3x + n^2 + 2 \quad \Rightarrow$$
$$\Rightarrow \quad 6un^2 + 18ux - 6u - n^2 - 3x + 1 = 6un^2 + 18ux + 3x + n^2 + 2 \quad \Rightarrow$$
$$\Rightarrow \quad -2n^2 - 6x - 1 = 6u \quad \Rightarrow \quad u = \frac{-2n^2 - 6x - 1}{6} \langle\, 0$$

*u* definíció szerint természetes szám (lásd (10a)-(10d)), ennek azonban a (20a)-(20c) levezetés eredménye ellentmond!

**Dénes Tamás** matematikus-kriptográfus **email: tdenest@freemail.hu**

**(3d),(3e) - (10c) – (10b) eset:**

(21a)
$$g_x = g_1 + 3(x-1) \overset{(3d),(3e)}{=} n^2 + 4 + 3(x-1) \overset{(10c)}{=} 6(6uv + u - v) - 1$$
$$g_{x+1} = g_2 + 3(x-2) \overset{(3d),(3e)}{=} n^2 + 6 + 3(x-2) \overset{(10b)}{=} 6(6uv - u - v) + 1$$

$$\overset{(21a)}{\Rightarrow} \quad \frac{n^2 + 3(x-1) + 5}{6} = v(6u-1) + u \Rightarrow \quad v = \frac{n^2 + 3(x-1) + 5 - 6u}{6(6u-1)} \quad \overset{(21a)}{\Rightarrow}$$
$$\overset{(21a)}{\Rightarrow} \quad \frac{n^2 + 5 + 3(x-2)}{6} = 6uv - u - v \quad \Rightarrow$$

(21b)
$$\Rightarrow \quad \frac{n^2 + 5 + 3(x-2)}{6} = 6u\frac{n^2 + 3(x-1) + 5 - 6u}{6(6u-1)} - u - \frac{n^2 + 3(x-1) + 5 - 6u}{6(6u-1)} =$$
$$= \frac{6un^2 + 18u(x-1) + 30u - 36u^2 - 36u^2 + 6u - n^2 - 3(x-1) - 5 + 6u}{6(6u-1)} =$$
$$= \frac{6un^2 + 18ux - 72u^2 + 24u - 3x - n^2 - 2}{6(6u-1)}$$

$$\overset{(21b)}{\Rightarrow} \quad \left(n^2 + 5 + 3(x-2)\right)(6u-1) = 6un^2 + 18ux - 72u^2 + 24u - 3x - n^2 - 2 \quad \Rightarrow$$

(21c)
$$\Rightarrow \quad 6un^2 + 18ux - 6u - n^2 - 3x + 1 = 6un^2 + 18ux - 72u^2 + 24u - 3x - n^2 - 2 \quad \Rightarrow$$
$$\Rightarrow \quad 72u^2 - 30u = 0 \quad \Rightarrow \quad u(72u - 30) = 0 \quad \Rightarrow \quad u_1 = 0, \quad u_2 = \frac{30}{72}$$

*u* definíció szerint természetes szám (lásd (10a)-(10d)), ennek azonban a (21a)-(21c) levezetés eredménye ellentmond!

**Dénes Tamás** matematikus-kriptográfus **email:** **tdenest@freemail.hu**

**(3d),(3e) - (10d) – (10a) eset:**

(22a)
$$g_x = g_1 + 3(x-1) \overset{(3d),(3e)}{=} n^2 + 4 + 3(x-1) \overset{(10d)}{=} 6(6uv - u + v) - 1$$
$$g_{x+1} = g_2 + 3(x-2) \overset{(3d),(3e)}{=} n^2 + 6 + 3(x-2) \overset{(10a)}{=} 6(6uv + u + v) + 1$$

$$\overset{(22a)}{\Rightarrow} \quad \frac{n^2 + 3(x-1) + 5}{6} = v(6u+1) - u \Rightarrow \quad v = \frac{n^2 + 3(x-1) + 5 + 6u}{6(6u+1)} \quad \overset{(22a)}{\Rightarrow}$$
$$\overset{(22a)}{\Rightarrow} \quad \frac{n^2 + 5 + 3(x-2)}{6} = 6uv + u + v \quad \Rightarrow$$

(22b)
$$\Rightarrow \quad \frac{n^2 + 5 + 3(x-2)}{6} = 6u\frac{n^2 + 3(x-1) + 5 + 6u}{6(6u+1)} + u + \frac{n^2 + 3(x-1) + 5 + 6u}{6(6u+1)} =$$
$$= \frac{6un^2 + 18u(x-1) + 30u + 36u^2 + 36u^2 + 6u + n^2 + 3x + 2 + 6u}{6(6u+1)} =$$
$$= \frac{6un^2 + 18ux - 72u^2 + 24u + 3x + n^2 + 2}{6(6u+1)}$$

$$\overset{(22b)}{\Rightarrow} \quad \left(n^2 + 5 + 3(x-2)\right)(6u+1) = 6un^2 + 18ux - 72u^2 + 24u + 3x + n^2 + 2 \quad \Rightarrow$$

(22c)
$$\Rightarrow \quad 6un^2 + 18ux - 6u + n^2 + 3x - 1 = 6un^2 + 18ux - 72u^2 + 24u - 3x - n^2 - 2 \quad \Rightarrow$$
$$\Rightarrow \quad 72u^2 - 24u - 3 = 0 \quad \Rightarrow \quad 24u^2 - 8u - 1 = 0 \quad \Rightarrow \quad u_{1,2} = \underbrace{\frac{2 \pm \sqrt{10}}{12}}_{nem \;\; egész \;\; szám}$$

*u* definíció szerint természetes szám (lásd (10a)-(10d)), ennek azonban a (22a)-(22c) levezetés eredménye ellentmond!

**Dénes Tamás** matematikus-kriptográfus **email: tdenest@freemail.hu**

**(3d),(3e) - (10d) – (10b) eset:**

(23a)
$$g_x = g_1 + 3(x-1) \overset{(3d),(3e)}{=} n^2 + 4 + 3(x-1) \overset{(10d)}{=} 6(6uv - u + v) - 1$$
$$g_{x+1} = g_2 + 3(x-2) \overset{(3d),(3e)}{=} n^2 + 6 + 3(x-2) \overset{(10b)}{=} 6(6uv - u - v) + 1$$

$$\overset{(23a)}{\Rightarrow} \quad \frac{n^2 + 3(x-1) + 5}{6} = v(6u+1) - u \Rightarrow \quad v = \frac{n^2 + 3(x-1) + 5 + 6u}{6(6u+1)} \quad \overset{(23a)}{\Rightarrow}$$
$$\overset{(23a)}{\Rightarrow} \quad \frac{n^2 + 5 + 3(x-2)}{6} = 6uv - u - v \quad \Rightarrow$$

(23b)
$$\Rightarrow \quad \frac{n^2 + 5 + 3(x-2)}{6} = 6u\frac{n^2 + 3(x-1) + 5 + 6u}{6(6u+1)} - u - \frac{n^2 + 3(x-1) + 5 + 6u}{6(6u+1)} =$$
$$= \frac{6un^2 + 18u(x-1) + 30u + 36u^2 - 36u^2 - 6u - n^2 - 3x - 2 - 6u}{6(6u+1)} =$$
$$= \frac{6un^2 + 18ux - 3x - n^2 - 2}{6(6u+1)}$$

$$\overset{(23b)}{\Rightarrow} \quad \left(n^2 + 5 + 3(x-2)\right)(6u+1) = 6un^2 + 18ux - 3x - n^2 - 2 \quad \Rightarrow$$

(23c)
$$\Rightarrow \quad 6un^2 + 18ux - 6u + n^2 + 3x - 1 = 6un^2 + 18ux - 3x - n^2 - 2 \quad \Rightarrow$$
$$\Rightarrow \quad -6u + 2n^2 + 6x + 1 = 0 \quad \Rightarrow \quad u = \frac{2n^2 + 6x + 1}{6} = x + \underbrace{\frac{2n^2 + 1}{6}}_{sosem\ \ eg\acute{e}sz\ \ sz\acute{a}m}$$

*u* definíció szerint természetes szám (lásd (10a)-(10d)), ennek azonban a (23a)-(23c) levezetés eredménye ellentmond!

**Dénes Tamás** matematikus-kriptográfus **email: tdenest@freemail.hu**

**(3f) - (10c) – (10a) eset:**

(24a)
$$g_x = g_1 + 3(x-1) \overset{(3f)}{=} n^2 + 2 + 3(x-1) \overset{(10c)}{=} 6(6uv + u - v) - 1$$
$$g_{x+1} = g_2 + 3(x-2) \overset{(3f)}{=} n^2 + 4 + 3(x-2) \overset{(10a)}{=} 6(6uv + u + v) + 1$$

$$\overset{(24a)}{\Rightarrow} \quad \frac{n^2 + 3(x-1) + 3}{6} = v(6u-1) + u \Rightarrow \quad v = \frac{n^2 + 3(x-1) + 3 - 6u}{6(6u-1)} \quad \overset{(24a)}{\Rightarrow}$$
$$\overset{(24a)}{\Rightarrow} \quad \frac{n^2 + 3 + 3(x-2)}{6} = 6uv + u + v \quad \Rightarrow$$

(24b)
$$\Rightarrow \quad \frac{n^2 + 3 + 3(x-2)}{6} = 6u\frac{n^2 + 3(x-1) + 3 - 6u}{6(6u-1)} + u + \frac{n^2 + 3(x-1) + 3 - 6u}{6(6u-1)} =$$
$$= \frac{6un^2 + 18u(x-1) + 18u - 36u^2 + 36u^2 - 6u + n^2 + 3x - 6u}{6(6u-1)} =$$
$$= \frac{6un^2 + 18ux - 12u + 3x + n^2}{6(6u-1)}$$

$$\overset{(24b)}{\Rightarrow} \quad \left(n^2 + 3 + 3(x-2)\right)(6u-1) = 6un^2 + 18ux - 12u + 3x + n^2 \quad \Rightarrow$$

(24c)
$$\Rightarrow \quad 6un^2 + 18ux - 18u - n^2 - 3x + 3 = 6un^2 + 18ux - 12u + 3x + n^2 \quad \Rightarrow$$
$$\Rightarrow \quad 6u + 2n^2 + 6x + 6 = 0 \quad \Rightarrow \quad u = -\frac{2n^2 + 6x + 6}{6} \langle\ 0$$

*u* definíció szerint természetes szám (lásd (10a)-(10d)), ennek azonban a (24a)-(24c) levezetés eredménye ellentmond!

**Dénes Tamás** matematikus-kriptográfus **email: tdenest@freemail.hu**

**(3f) - (10c) – (10b) eset:**

(25a)
$$g_x = g_1 + 3(x-1) \overset{(3f)}{=} n^2 + 2 + 3(x-1) \overset{(10c)}{=} 6(6uv + u - v) - 1$$
$$g_{x+1} = g_2 + 3(x-2) \overset{(3f)}{=} n^2 + 4 + 3(x-2) \overset{(10b)}{=} 6(6uv - u - v) + 1$$

$$\overset{(25a)}{\Rightarrow} \quad \frac{n^2 + 3(x-1) + 3}{6} = v(6u-1) + u \Rightarrow \quad v = \frac{n^2 + 3(x-1) + 3 - 6u}{6(6u-1)} \quad \overset{(25a)}{\Rightarrow}$$
$$\overset{(25a)}{\Rightarrow} \quad \frac{n^2 + 3 + 3(x-2)}{6} = 6uv - u - v \quad \Rightarrow$$

(25b)
$$\Rightarrow \quad \frac{n^2 + 3 + 3(x-2)}{6} = 6u\frac{n^2 + 3(x-1) + 3 - 6u}{6(6u-1)} - u - \frac{n^2 + 3(x-1) + 3 - 6u}{6(6u-1)} =$$
$$= \frac{6un^2 + 18u(x-1) + 18u - 36u^2 - 36u^2 + 6u - n^2 - 3x + 6u}{6(6u-1)} =$$
$$= \frac{6un^2 + 18ux - 72u^2 + 12u - 3x - n^2}{6(6u-1)}$$

$$\overset{(25b)}{\Rightarrow} \quad \left(n^2 + 3 + 3(x-2)\right)(6u-1) = 6un^2 + 18ux - 72u^2 + 12u - 3x - n^2 \quad \Rightarrow$$

(25c)
$$\Rightarrow \quad 6un^2 + 18ux - 18u - n^2 - 3x + 3 = 6un^2 + 18ux - 72u^2 + 12u - 3x - n^2 \quad \Rightarrow$$
$$\Rightarrow \quad 72u^2 - 30u - 3 = 0 \quad \Rightarrow \quad 24u^2 - 10u - 1 = 0 \quad \Rightarrow \quad u_{1,2} = \frac{10 \pm 14}{48} \langle 1$$

*u* definíció szerint természetes szám (lásd (10a)-(10d)), ennek azonban a (25a)-(25c) levezetés eredménye ellentmond!

**Dénes Tamás** matematikus-kriptográfus **email:** tdenest@freemail.hu

**(3f) - (10d) – (10a) eset:**

(26a)
$$g_x = g_1 + 3(x-1) \overset{(3f)}{=} n^2 + 2 + 3(x-1) \overset{(10d)}{=} 6(6uv - u + v) - 1$$
$$g_{x+1} = g_2 + 3(x-2) \overset{(3f)}{=} n^2 + 4 + 3(x-2) \overset{(10a)}{=} 6(6uv + u + v) + 1$$

$$\overset{(26a)}{\Rightarrow} \quad \frac{n^2 + 3(x-1) + 3}{6} = v(6u+1) - u \Rightarrow \quad v = \frac{n^2 + 3(x-1) + 3 + 6u}{6(6u+1)} \quad \overset{(26a)}{\Rightarrow}$$
$$\overset{(26a)}{\Rightarrow} \quad \frac{n^2 + 3 + 3(x-2)}{6} = 6uv + u + v \quad \Rightarrow$$

(26b)
$$\Rightarrow \quad \frac{n^2 + 3 + 3(x-2)}{6} = 6u\frac{n^2 + 3(x-1) + 3 + 6u}{6(6u+1)} + u + \frac{n^2 + 3(x-1) + 3 + 6u}{6(6u+1)} =$$
$$= \frac{6un^2 + 18u(x-1) + 18u + 36u^2 + 36u^2 + 6u + n^2 + 3x + 6u}{6(6u+1)} =$$
$$= \frac{6un^2 + 18ux + 72u^2 + 12u + 3x + n^2}{6(6u+1)}$$

$$\overset{(26b)}{\Rightarrow} \quad \left(n^2 + 3 + 3(x-2)\right)(6u+1) = 6un^2 + 18ux - 18u + 3x + n^2 - 3 \quad \Rightarrow$$

(26c)
$$\Rightarrow \quad 6un^2 + 18ux - 18u + n^2 + 3x - 3 = 6un^2 + 18ux + 72u^2 + 12u + 3x + n^2 \quad \Rightarrow$$
$$\Rightarrow \quad 72u^2 + 30u + 3 = 0 \quad \Rightarrow \quad 24u^2 + 10u + 1 = 0 \quad \Rightarrow \quad u_{1,2} = \frac{-10 \pm 2}{48} \langle \; 0$$

*u* definíció szerint természetes szám (lásd (10a)-(10d)), ennek azonban a (26a)-(26c) levezetés eredménye ellentmond!

**Dénes Tamás** matematikus-kriptográfus **email: tdenest@freemail.hu**

**(3f) - (10d) – (10b) eset:**

(27a)
$$g_x = g_1 + 3(x-1) \overset{(3f)}{=} n^2 + 2 + 3(x-1) \overset{(10d)}{=} 6(6uv - u + v) - 1$$
$$g_{x+1} = g_2 + 3(x-2) \overset{(3f)}{=} n^2 + 4 + 3(x-2) \overset{(10b)}{=} 6(6uv - u - v) + 1$$

$$\overset{(27a)}{\Rightarrow} \quad \frac{n^2 + 3(x-1) + 3}{6} = v(6u+1) - u \Rightarrow \quad v = \frac{n^2 + 3(x-1) + 3 + 6u}{6(6u+1)} \quad \overset{(27a)}{\Rightarrow}$$
$$\overset{(27a)}{\Rightarrow} \quad \frac{n^2 + 3 + 3(x-2)}{6} = 6uv - u - v \quad \Rightarrow$$

(27b)
$$\Rightarrow \quad \frac{n^2 + 3 + 3(x-2)}{6} = 6u \frac{n^2 + 3(x-1) + 3 + 6u}{6(6u+1)} - u - \frac{n^2 + 3(x-1) + 3 + 6u}{6(6u+1)} =$$
$$= \frac{6un^2 + 18u(x-1) + 18u + 36u^2 - 36u^2 - 6u - n^2 - 3x - 6u}{6(6u+1)} =$$
$$= \frac{6un^2 + 18ux - 12u - 3x - n^2}{6(6u+1)}$$

(27c)
$$\overset{(27b)}{\Rightarrow} \quad \left(n^2 + 3 + 3(x-2)\right)(6u+1) = 6un^2 + 18ux - 18u + 3x + n^2 - 3 \quad \Rightarrow$$
$$\Rightarrow \quad 6un^2 + 18ux - 18u + n^2 + 3x - 3 = 6un^2 + 18ux - 12u - 3x - n^2 \quad \Rightarrow$$
$$\Rightarrow \quad 6u - 2n^2 - 6x + 3 = 0 \quad \Rightarrow \quad u = x + \underbrace{\frac{2n^2 - 3}{6}}_{sosem\ \ eg\acute{e}sz\ \ sz\acute{a}m}$$

*u* definíció szerint természetes szám (lásd (10a)-(10d)), ennek azonban a (27a)-(27c) levezetés eredménye ellentmond!

A fentiekben egyrészt bizonyítottuk, hogy az $\left[n^2, (n+1)^2\right]$ intervallumban mindig létezik *t* számú $g_1, \ldots, g_t$ *6z±1* alakú természetes szám (lásd (9a)-(9f)) és csak ezek között lehetnek az intervallumbeli prímszámok.

Ugyanakkor a fenti (12a)-(27c) levezetésekben bebizonyítottuk, hogy az indirekt feltétel egyetlen *n* természetes szám esetén sem teljesül. Ebből következik, hogy bármely *n* természetes szám esetén létezik az (5) és (7) típusú $g_1, \ldots, g_t$ természetes számok között prímszám. Ez pedig éppen a tétel (1) állítását igazolja.

Q.E.D.

**Dénes Tamás** matematikus-kriptográfus **email: tdenest@freemail.hu**

**1. Táblázat**

| 1. | 2. | 3. | 4. | 5. | 6. | 7. | 8. | 9. | 10. |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| ***n*** | $n^2$ | $(n+1)^2$ | | ***típus*** | $g_1$ | | ***típus*** | $g_2$ | ***t*** |
| **3** | *9* | *16* | (3f)$\Rightarrow$ $g_1=n^2+2$ | *6z-1* | ***11*** | (4f)$\Rightarrow$ $g_2=n^2+4$ | *6z+1* | ***13*** | 2 |
| **4** | *16* | *25* | (3b)$\Rightarrow$ $g_1=n^2+1$ | *6z-1* | ***17*** | (4b)$\Rightarrow$ $g_2=n^2+3$ | *6z+1* | ***19*** | 3 |
| **5** | *25* | *36* | (3e)$\Rightarrow$ $g_1=n^2+4$ | *6z-1* | ***29*** | (4e)$\Rightarrow$ $g_2=n^2+6$ | *6z+1* | ***31*** | 3 |
| **6** | *36* | *49* | (3a)$\Rightarrow$ $g_1=n^2+1$ | *6z+1* | ***37*** | (4a)$\Rightarrow$ $g_2=n^2+5$ | *6z-1* | ***41*** | 4 |
| **7** | *49* | *64* | (3d)$\Rightarrow$ $g_1=n^2+4$ | *6z-1* | ***53*** | (4d)$\Rightarrow$ $g_2=n^2+6$ | *6z+1* | *55* | 4 |
| **8** | *64* | *81* | (3c)$\Rightarrow$ $g_1=n^2+1$ | *6z-1* | *65* | (4c)$\Rightarrow$ $g_2=n^2+3$ | *6z+1* | ***67*** | 6 |
| **9** | *81* | *100* | (3f)$\Rightarrow$ $g_1=n^2+2$ | *6z-1* | ***83*** | (4f)$\Rightarrow$ $g_2=n^2+4$ | *6z+1* | *85* | 6 |
| **10** | *100* | *121* | (3b)$\Rightarrow$ $g_1=n^2+1$ | *6z-1* | ***101*** | (4b)$\Rightarrow$ $g_2=n^2+3$ | *6z+1* | ***103*** | 7 |
| **11** | *121* | *144* | (3e)$\Rightarrow$ $g_1=n^2+4$ | *6z-1* | *125* | (4e)$\Rightarrow$ $g_2=n^2+6$ | *6z+1* | ***127*** | 7 |
| **12** | *144* | *169* | (3a)$\Rightarrow$ $g_1=n^2+1$ | *6z+1* | *145* | (4a)$\Rightarrow$ $g_2=n^2+5$ | *6z-1* | ***149*** | 8 |
| **13** | *169* | *196* | (3d)$\Rightarrow$ $g_1=n^2+4$ | *6z-1* | ***173*** | (4d)$\Rightarrow$ $g_2=n^2+6$ | *6z+1* | *175* | 8 |
| **14** | *196* | *225* | (3c)$\Rightarrow$ $g_1=n^2+1$ | *6z-1* | ***197*** | (4c)$\Rightarrow$ $g_2=n^2+3$ | *6z+1* | ***199*** | 10 |
| **…** | | | | | | | | | |
| **51** | *2601* | *2704* | (3f)$\Rightarrow$ $g_1=n^2+2$ | *6z-1* | *2603* | (4f)$\Rightarrow$ $g_2=n^2+4$ | *6z+1* | *2605* | 34 |
| | | | $g_3=g_1+6$ | *6z-1* | ***2609*** | | | | |
| **52** | *2704* | *2809* | (3b)$\Rightarrow$ $g_1=n^2+1$ | *6z-1* | *2705* | (4b)$\Rightarrow$ $g_2=n^2+3$ | *6z+1* | ***2707*** | 35 |
| **53** | *2809* | *2916* | (3e)$\Rightarrow$ $g_1=n^2+4$ | *6z-1* | *2813* | (4e)$\Rightarrow$ $g_2=n^2+6$ | *6z+1* | *2815* | 35 |
| | | | $g_3=g_1+6$ | *6z-1* | ***2819*** | | | | |
| **54** | *2916* | *3025* | (3a)$\Rightarrow$ $g_1=n^2+1$ | *6z+1* | ***2917*** | (4a)$\Rightarrow$ $g_2=n^2+5$ | *6z-1* | *2921* | 36 |
| **55** | *3025* | *3136* | (3d)$\Rightarrow$ $g_1=n^2+4$ | *6z-1* | *3029* | (4d)$\Rightarrow$ $g_2=n^2+6$ | *6z+1* | *3031* | 36 |
| | | | $g_3=g_1+6$ | *6z-1* | *3035* | $g_4=g_2+6$ | *6z+1* | ***3037*** | |
| **56** | *3136* | *3249* | (3c)$\Rightarrow$ $g_1=n^2+1$ | *6z-1* | ***3137*** | (4c)$\Rightarrow$ $g_2=n^2+3$ | *6z+1* | *3139* | 38 |
| **…** | | | | | | | | | |

**Dénes Tamás** matematikus-kriptográfus **email: tdenest@freemail.hu**

**2. Táblázat**

| ***n*** | ***n²*** | ***(n+1)²*** | $n^2 \langle q \langle (n+1)^2$ |
|---:|---:|---:|---:|
| 1 | *1* | *4* | ***2*** |
| 2 | *4* | *9* | ***5*** |
| 3 | *9* | *16* | ***11*** |
| 4 | *16* | *25* | ***19*** |
| 5 | *25* | *36* | ***31*** |
| 6 | *36* | *49* | ***41*** |
| 7 | *49* | *64* | ***61*** |
| 8 | *64* | *81* | ***67*** |
| 9 | *81* | *100* | ***83*** |
| 10 | *100* | *121* | ***103*** |
| 11 | *121* | *144* | ***139*** |
| 12 | *144* | *169* | ***149*** |
| 13 | *169* | *196* | ***181*** |
| … | | | |
| 100 | *10.000* | *10.201* | ***10.069*** |
| … | | | |
| 1.000 | *1.000.000* | *1.002.001* | ***1.000.039*** |
| … | | | |
| 10.000 | *100.000.000* | *100.020.001* | ***100.000.213*** |
| … | | | |

**Dénes Tamás** matematikus-kriptográfus **email: tdenest@freemail.hu**

## Hivatkozások

[Dénes 2001] Dénes, Tamás: Complementary prime-sieve, PUre Mathematics and Applications, Vol.12 (2001), No. 2, pp. 197-207
http://www.titoktan.hu/_raktar/_e_vilagi_gondolatok/KomplementerPrimszita.pdf