

MATEMATIKAI LAPOK

27. ÉVFOLYAM 3—4. SZÁMÁBÓL

Dénes Tamás

Páros fokszámú reguláris gráfok szögpont szerinti „evolúciója”

PÁROS FOKSZÁMÚ REGULÁRIS GRÁFOK SZÖGPONT SZERINTI „EVOLÚCIÓJA”

DÉNES TAMÁS

Általában érdekes a gráfok körében azt a problémát vizsgálni, hogy azonos struktúrával rendelkező, de eltérő szögpont, illetve élszámú gráfok milyen transzformációval vihetők át egymásba.

Például egy Γ_n n szögpontú teljes gráf előállítható a Γ_{n-1} $n-1$ szögpontú teljes gráfból úgy, hogy hozzáveszünk egy szögpontot és azt Γ_{n-1} minden szögpontjával összekötjük éllel. Ugyanez a transzformáció bármely más fokszámú reguláris gráf-osztálynál nem vezet célhoz. Más aspektusból foglalkozott gráf evolúcióval [3]-ban Erdős Pál és Rényi Alfréd.

Jelen dolgozatban csak irányítatlan, páros fokszámú reguláris gráfokkal foglalkozunk.

A dolgozat első részében definiáljuk az evolúciós transzformációt és ezzel kapcsolatos egyszerű tételeket bizonyítunk be, a második és harmadik részben azokról a gráfokról szólnunk, amelyekre nem alkalmazható a transzformáció.

1. Definíció. Legyen $\Gamma_n = (P, E)$ n szögpontú egyszerű gráf és $p_i \in P, p_j \in P$ szomszédos szögpontok, valamint p olyan szögpont, amely p_i, p_j egyikével sem szomszédos. (P és E a Γ_n gráf szögpont, illetve élhalmaza jelöli.)

A p szögponttal végzett EC transzformáción értjük a következőt:

$$(1) \quad EC: E \rightarrow E'$$

ahol

$$E' = E \setminus \{(p, p_i)\} \cup \{(pp_i), (pp_j)\}$$

A továbbiakban jelöljük az összes páros reguláris gráfok halmazát \mathcal{PR} -rel, az összes $2, 4, \dots, k$ (k páros) fokszámú reguláris gráfok halmazát pedig rendre $\mathcal{PR}_2, \mathcal{PR}_4, \dots, \mathcal{PR}_k$ -val.

Ekkor nyilván teljesül a következő:

1. $\mathcal{PR} = \mathcal{PR}_2 \cup \mathcal{PR}_4 \cup \dots \cup \mathcal{PR}_k \cup \dots$
2. $\forall i \neq j$ (i, j páros) esetén $\mathcal{PR}_i \cap \mathcal{PR}_j = \emptyset$
3. $\forall \Gamma_{n,k} \in \mathcal{PR}$ gráfhoz $\exists! \mathcal{PR}_k: \Gamma_{n,k} \in \mathcal{PR}_k$

vagyis a \mathcal{PR} halmaz egy osztályozásáról van szó.

2. Definíció. Legyen $\Gamma_{n,k} \in \mathcal{PR}_k$ tetszőleges n szögpontú, k -reguláris gráf. Továbbá $\Gamma_{n,k} = (P, E)$ és $\Gamma_{n+1} = (P \cup \{p\}, E')$, ahol $p \notin P$.

A p szögponttal végzett ET transzformáción értjük a p szögponttal végzett $k/2$ EC transzformációt, azaz legyenek $(p_1 p_2), (p_3 p_4), \dots, (p_{k-1} p_k)$ $\Gamma_{n,k}$ -beli élek, ekkor

$$(2) \quad ET: \Gamma_{n,k} \rightarrow \Gamma_{n+1}$$

ahol

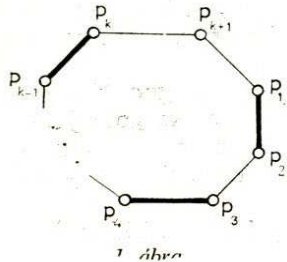
$$E' = E \setminus \{(p_1 p_2), (p_3 p_4), \dots, (p_{k-1} p_k)\} \cup \{(pp_1), (pp_2), \dots, (pp_k)\}$$

1. Tétel. Legyen k tetszőleges páros szám. Minden $\Gamma_{n,k} \in \mathcal{PR}_k$ gráfra alkalmazható ET transzformáció.

BIZONYÍTÁS. Elég belátnunk, hogy $\Gamma_{n,k}$ -ban létezik $k/2$ független él. A bizonyításhoz felhasználjuk G. A. Dirac [2] következő tételét:

„Ha egy egyszerű gráf minden szögpontjának foka legalább r ($r > 1$), akkor van a gráfban egy legalább $r+1$ hosszúságú kör.”

Jelöljük $\Gamma_{n,k}$ egy $k+1$ hosszúságú körét K -val (az idézett tétel alapján ilyen biztos van), ekkor például az 1. ábrán látható módon kiválasztva az éleket $((p_1 p_2), (p_3 p_4), \dots, (p_{k-1} p_k))$ egy pontosan $k/2$ független élből álló élhalmazt kapunk.



3. Definíció. Legyen $\Gamma_{n,k} = (P, E) \in \mathcal{PR}_k$, valamint $p \in P$ és jelöljük $p_1 p_2, p_3 p_4, \dots, p_{k-1} p_k$ -val a p szomszédaiból alkotott, páronként nem szomszédos szögpontpárokat. Ekkor ET^{-1} transzformáción a következőt értjük:

$$(3) \quad ET^{-1}: \Gamma_{n,k} \rightarrow \Gamma_{n-1} = (P', E'), \quad P' = P \setminus \{p\} \\ E' = E \setminus \{(pp_1), (pp_2), \dots, (pp_k)\} \cup \{(p_1 p_2), \dots, (p_{k-1} p_k)\}$$

4. Definíció. Legyen $\Gamma_n = (P, E)$ n szögpontú gráf, $p \in P$ és q_1, q_2, \dots, q_r a p szögpont Γ_n -beli szomszédei. A p által generált Γ_n -beli részgráfon (jelöljük ezt $G_p = (P', E')$ -vel) értjük Γ_n -nek azt a részgráfját, melyre teljesül, hogy $P' = \{q_1, q_2, \dots, q_r\}$ és $(q_i q_j) \in E' \Leftrightarrow (q_i q_j) \in E$.

5. Definíció. Legyen $\Gamma_n \in \mathcal{PR}$ és $p \in \Gamma_n$. A p szögpont T -tulajdonságú, ha az általa generált Γ_n -beli részgráf komplementere tartalmaz 1-faktort.

2. Tétel. Egy $\Gamma_{n,k} = (P, E) \in \mathcal{PR}_k$ gráfra akkor és csak akkor alkalmazható ET^{-1} transzformáció, ha létezik $p \in \Gamma_{n,k}$ T -tulajdonságú szögpontja.

BIZONYÍTÁS. Szükségesség: Az ET^{-1} transzformáció definíciójából következik, hogy létezik $p \in \Gamma_{n,k}$ melynek szomszédaiból kiválaszthatók a $p_1 p_2, p_3 p_4, \dots, p_{k-1} p_k$ páronként nem szomszédos szögpontpárok. Ezek a p_1, p_2, \dots, p_k szögpontokból alkotott $\Gamma_{n,k}$ -beli részgráf komplementerében szomszédosak lesznek és éppen egy 1-faktort alkotnak, hiszen bármely két szögpontpárnak sincs közös szögpontja. Ez viszont pontosan azt jelenti, hogy a p szögpont T -tulajdonságú.

Elegendőség: Ebbe az irányba a bizonyítás pontosan az előző gondolatmenet megfordítása.

3. Tétel. Minden páros $k \geq 4$ számhoz létezik $\Gamma_{n,k} \in \mathcal{PR}_k$ gráf, amelynek nincs T -tulajdonságú szögpontja.

Ekvivalens megfogalmazásban: Minden páros $k \geq 4$ számhoz létezik $\Gamma_{n,k} \in \mathcal{PR}_k$ gráf, amely egyetlen $\Gamma_{n-1,k} \in \mathcal{PR}_k$ gráfból sem áll elő ET transzformációval.

BIZONYÍTÁS. Legyen k tetszőleges ($k \geq 4$) páros szám. Tekintsünk két $k+1$ szögpontú $\Gamma_{k+1,k}^1 = (P_1, E_1)$ és $\Gamma_{k+1,k}^2 = (P_2, E_2)$ teljes gráfot. Legyenek $(p_{i_1} p_{j_1}) \in E_1$

és $(p_{i_2} p_{j_2}) \in E_2$, ekkor képezzük a következő $\Gamma_{n,k} = (P, E)$ gráfot

$$(4) \quad P = P_1 \cup P_2$$

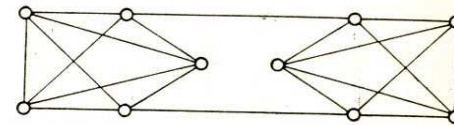
$$(5) \quad E = E_1 \cup E_2 \setminus \{(p_{i_1} p_{j_1}), (p_{i_2} p_{j_2})\} \cup \{(p_{i_1} p_{i_2}), (p_{j_1} p_{j_2})\}$$

$k=4$ esetén $\Gamma_{n,k}$ a 2. ábrán látható.

Bebizonyítjuk, hogy az így konstruált $\Gamma_{n,k}$ gráfnak nincs T -tulajdonságú szögpontja.

Mivel minden így konstruált $\Gamma_{n,k}$ gráf szimmetrikus, a bizonyítást elég az egyik (például $\Gamma_{k+1,k}^1$) szimmetrikus részgráf szögpontjaira elvégezni. Így két eset különböz tethető meg:

- a) p_{i_1}, p_{j_1} } szögpontot
- b) bármely másik } vizsgáljuk



2. ábra

Az a) esetben jelöljük a p_{i_1} szomszédaiból alkotott részgráfot $G_1 = (A_1, B_1)$ -el, ekkor

$$(6) \quad A_1 = P_1 \cup \{p_{i_2}\} \setminus \{p_{i_1}\}$$

$$(7) \quad B_1 = E_1 \setminus \{(p_{i_1} p_r) \mid \forall p_r \in P_1 \setminus \{p_{i_1}\}\}$$

Tehát $\bar{G}_1 = (A'_1, B'_1)$ a következő lesz

$$(8) \quad A'_1 = A_1$$

$$(9) \quad B'_1 = \{(p_{i_2} p_s) \mid \forall p_s \in P_1 \setminus \{p_{i_1}\}\}$$

így \bar{G}_1 nem tartalmaz 1-faktort, vagyis p_{i_1} (és ugyanilyen megfontolásokból $p_{i_2}, p_{j_1}, p_{j_2}$) nem T -tulajdonságú.

A b) esetben legyen $p \neq p_{i_1} \neq p_{j_1}$ és $p \in P_1$, a p szomszédaiból alkotott részgráf $G_2 = (A_2, B_2)$ a következő:

$$(10) \quad A_2 = P_1 \setminus \{p\}$$

$$(11) \quad B_2 = E_1 \setminus \{(p_{i_1} p_{j_1}), (pp_r) \mid \forall p_r \in P_1 \setminus \{p\}\}$$

Tehát $\bar{G}_2 = (A'_2, B'_2)$ az alábbi lesz:

$$(12) \quad A'_2 = A_2$$

$$(13) \quad B'_2 = \{(p_{i_1} p_{j_1})\}$$

így \bar{G}_2 szintén nem tartalmaz 1-faktort, vagyis a b) esethez tartozó szögpontok egyike sem T -tulajdonságú. Ezzel a tételt bebizonyítottuk.

$k=4$ esetén egy $G_1, \bar{G}_1, G_2, \bar{G}_2$ a 3/a, b, c, d ábrákon látható. (A vastag vonallal kihúzott élek és pontok tartoznak rendre a megfelelő gráfokhoz.)

6. Definíció. Egy \mathcal{PR} -beli gráfot VP , vagy *szögpont prím* gráfnak nevezzünk, ha nincs T -tulajdonságú szögpontja.

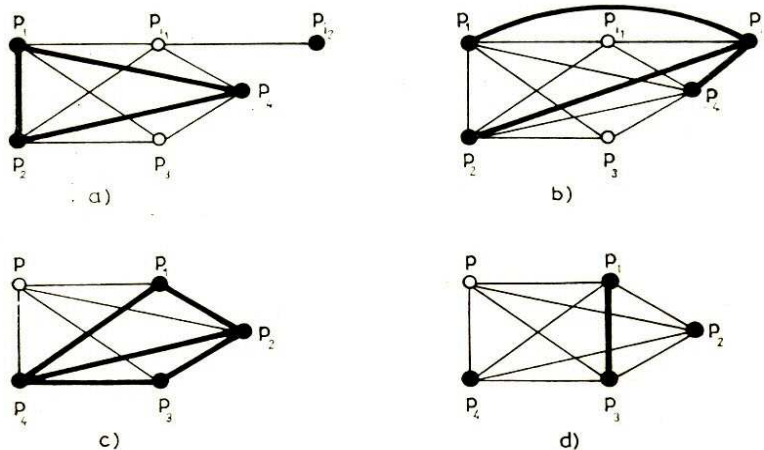
A 3. tétel tehát így is megfogalmazható: A $\mathcal{PR}_4, \mathcal{PR}_6, \mathcal{PR}_8, \dots, \mathcal{PR}_k, \dots$ gráfosztályok mindegyike tartalmaz VP gráfot.

A következőkben azt vizsgáljuk, hogy milyen feltételek mellett nem T -tulajdonságú egy szögpont. Felhasználjuk az alábbi ismert eredményt [1].

1. Lemma. Egy teljes Γ_n (n páros) gráf $n-1$ elsőfokú faktor szorzatára bontható.

4. Tétel. Legyen $\Gamma_{n,k} \in \mathcal{P}\mathcal{R}_k$ és $p \in \Gamma_{n,k} = (P, E)$. Ha p nem T -tulajdonságú, akkor létezik legalább $k-1$ három hosszúságú kör, amely p -t tartalmazza.

Bizonyítás. Ha p nem T -tulajdonságú, akkor az általa generált $\Gamma_{n,k}$ -beli részgráf (jelölje $G=(A, B)$) komplementere nem tartalmaz 1-faktort. Az 1. lemma szerint



3. ábra

\bar{G} $k-1$ féle élfüggetlen 1-faktort tartalmazhat, így G -ben ezen faktorok mindegyikéből legalább egy élnek szerepelnie kell ahhoz, hogy \bar{G} -ben ne legyen 1-faktor. Tehát G éleinek száma legalább $k-1$. Mivel G minden élének végpontjai p szomszédai, így p -t tartalmazó három hosszúságú kört alkotnak. Ezzel a tételt bebizonyítottuk.

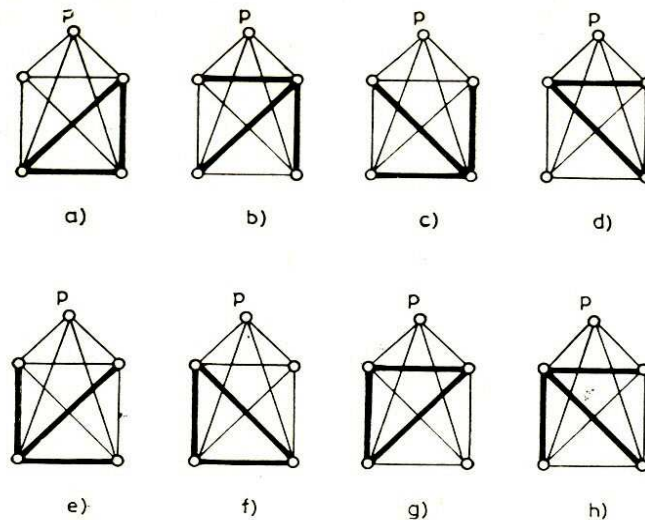
$k=4$ esetén az alábbi esetekben nem T -tulajdonságú a p szögpont (lásd 4/a, b, c, d, e, f, g, h ábra, \bar{G} vastag vonallal húzva).

2. Lemma. Legyen Γ_n n szögpontú (n páros) teljes gráf és jelöljük Γ_n összes 1-faktorainak számát F_n -nel. Ekkor

$$(14) \quad F_n = \frac{\binom{n}{2} \cdot \binom{n-2}{2} \cdot \dots \cdot \binom{2}{2}}{\left(\frac{n}{2}\right)!}$$

BIZONYÍTÁS. Könnyen látható, hogy $n=2$ esetén az állítás igaz. Tegyük fel, hogy minden $k \leq n-2$ esetén igaz az állítás, vagyis

$$(15) \quad F_k = \frac{\binom{k}{2} \cdot \binom{k-2}{2} \cdot \dots \cdot \binom{2}{2}}{\left(\frac{k}{2}\right)!}$$



4. ábra

Ekkor Γ_k -hoz két szögpontot hozzávéve $k+1$ féle új szögpontpár választható ki (a két pont sorrendjét nem vesszük figyelembe), melyek mindegyikéhez F_k számú 1-faktor tartozik, melyeknek pontosan egy közös élük van, így

$$(16) \quad F_{k+2} = (k+1) \cdot F_k.$$

Figyelembevétel, hogy

$$(17) \quad \frac{\binom{k+2}{2}}{\frac{k+2}{2}} = \frac{2 \cdot (k+2)!}{2! k! (k+2)} = k+1.$$

Tehát

$$(18) \quad F_{k+2} = \frac{\binom{k+2}{2}}{\frac{k+2}{2}} \cdot \frac{\binom{k}{2} \cdot \binom{k-2}{2} \cdot \dots \cdot \binom{2}{2}}{\left(\frac{k}{2}\right)!} = \frac{\binom{k+2}{2} \cdot \binom{k}{2} \cdot \dots \cdot \binom{2}{2}}{\left(\frac{k+2}{2}\right)!}$$

Ezzel a tétel bizonyítását befejeztük.

Korollárium. 1. A (16) összefüggés alapján F_n rekurzív módon is felírható:

$$(19) \quad F_n = (n-1) \cdot F_{n-2}.$$

2. A 2. lemma bizonyításából adódik, hogy ha e_i egy Γ_n -beli 1-faktorhoz tartozó él, akkor pontosan F_{n-2} olyan 1-faktor van Γ_n -ben, amely E -vel pontosan az e_i közös élt tartalmazza.

3. Ha a Γ_n -beli éldiszjunkt 1-faktorok számát FD_n -nel jelöljük, akkor az 1. lemma és (19) alapján:

$$FD_n = F_n \Leftrightarrow n-1 = (n-1) \cdot F_{n-2} \Rightarrow 1 = F_{n-2} \Rightarrow n = 4.$$

4. A (14) összefüggést egyszerűbb alakra hozhatjuk, ha a számlálót kifejtjük, azaz

$$F_n = \frac{n! \cdot (n-2)! \cdot \dots \cdot 2!}{2!(n-2)! \cdot 2!(n-4)! \cdot \dots \cdot 2!0!} = \frac{n!}{2^{\frac{n}{2}} \cdot \left(\frac{n}{2}\right)!}$$

7. Definíció. Legyen Γ_n n szögpontú gráf és

$$(20) \quad \mathcal{E} = \{E_1, E_2, \dots, E_m\}$$

Γ_n -beli 1-faktorok egy halmaza, valamint e_1, e_2, \dots, e_p Γ_n -beli élek.

Az e_1, e_2, \dots, e_p éleket az \mathcal{E} egy reprezentációjának mondjuk, ha minden \mathcal{E} -beli 1-faktorból legalább egy él szerepel közöttük.

3. Lemma. Legyen Γ_n teljes gráf (n páros). Jelölje Γ_n összes 1-faktorainak halmazát

$$(21) \quad \mathcal{E} = \{E_1, E_2, \dots, E_r\} \quad \text{ahol } r = F_n$$

valamint

$$(22) \quad R = \{e_1, e_2, \dots, e_{n-1}\}$$

Γ_n -beli élek egy halmazát.

R akkor és csak akkor reprezentációja \mathcal{E} -nek, ha bármely $e_i \neq e_j$ esetén nincs olyan $E_k \in \mathcal{E}$, amelyre $e_i \in E_k$ és $e_j \in E_k$.

BIZONYÍTÁS. Szükségesség: Tegyük fel, hogy R reprezentációja \mathcal{E} -nek és létezik $e_i \neq e_j$ melyre létezik E_k , hogy $e_i \in E_k$ és $e_j \in E_k$. A 2. lemma 2. korolláriuma alapján az e_i él F_{n-2} \mathcal{E} -beli 1-faktort reprezentál, ugyanígy e_j is. Mivel mindkét él szerepel E_k -ban, így a két él által reprezentált 1-faktorok K_{ij} számára igaz, hogy

$$(23) \quad K_{ij} < 2 \cdot F_{n-2}.$$

Ha tehát feltételezzük, hogy a többi R -beli $n-3$ él mindegyike a maximális $n-1$ 1-faktort reprezentálja, akkor az R által reprezentált \mathcal{E} -beli elemek $K_{\mathcal{E}}$ számára igaz, hogy

$$(24) \quad K_{\mathcal{E}} < (n-1) \cdot F_{n-2}$$

ami ellentmondás, hiszen \mathcal{E} elemeinek száma $(n-1) \cdot F_{n-2}$ és R \mathcal{E} -nek reprezentációja, tehát $K_{\mathcal{E}}$ -re az egyenlőségnak kell teljesülnie.

Elegendőség: Mivel minden $E_k \in \mathcal{E}$ 1-faktor csak egy $e_i \in R$ élt tartalmaz, valamint a 2. lemma 2. korolláriuma alapján egy e_i él F_{n-2} \mathcal{E} -beli 1-faktort reprezentál, így az $n-1$ számú R -beli él $(n-1) \cdot F_{n-2}$ számút, ami \mathcal{E} összes elemét jelenti.

Ezzel a tételt bebizonyítottuk.

5. Tétel. Egy Γ_n teljes gráf ($n > 4$ páros) összes 1-faktora akkor és csak akkor reprezentálható pontosan $n-1$ éllel, ha azok egy szögpontra illeszkednek.

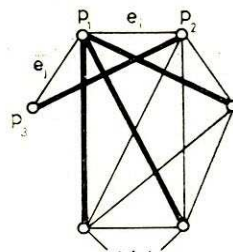
BIZONYÍTÁS. Szükségesség: Legyen $p \in \Gamma_n$ a vizsgált szögpont. Mivel minden Γ_n -beli 1-faktor tartalmaz egy p -re illeszkedő élt, így az összes ilyen él valóban a Γ_n -beli összes 1-faktorok egy $n-1$ elemű reprezentációja.

Elegendőség: Tekintsünk egy tetszőleges $(p_1 p_2) = e_i \in \Gamma_n$ élt (p_1, p_2 az e_i él végpontjai). Legyen ez az $n-1$ elemű reprezentáció első eleme. A 3. lemma alapján második elemnek csak olyan e_j él választható, amely egyetlen e_i -t tartalmazó 1-faktorban sem

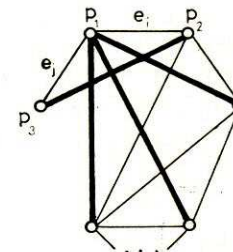
szerepel. Könnyen látható, hogy ilyen él csak azok közül választható, amelyek egyik végpontja p_1 vagy p_2 . (Lásd 5. ábra.) (A vastagon kihúzott élek a választhatók.)

Tegyük fel, hogy egy $(p_1 p_3) = e_j$ élt választunk a reprezentáció második elemének (lásd 6. ábra).

A 3. lemma szerint továbbra is a p_1 , illetve p_2 szögpontokra illeszkedő (még választható) élek közül választhatunk, azonban most már az e_j élre is alkalmazzuk



5. ábra



6. ábra

a 3. lemmát, így a keresett reprezentációnak p_3 -ra is illeszkednie kell. Ilyen él azonban csak a $(p_2 p_3)$ él lehet. Ezzel azonban a választható élek elfogytak. Ez a kiválasztás tehát akkor és csak akkor alkot reprezentációt, ha $n=4$, az összes többi esetben csak a p_1 -re illeszkedő $n-1$ él választható a reprezentáció elemeiként (ez tette szükségessé az $n > 4$ kikötést). Ezzel a tételt bebizonyítottuk. Az $n=4$ esetben az összes reprezentáció látható a 4. ábrán.

A továbbiakban bemutatunk egy olyan gráf típust, amelyről bizonyos feltételek mellett kimutatható, hogy VP gráf. Majd megvizsgáljuk, hogy adott k páros szám esetén melyik a legkisebb n szám, amelyre $\Gamma_{n,k} \in \mathcal{PR}_k$ VP gráf.

Jelöljük az összes teljes gráfok halmazát \mathcal{C} -vel, elemeit a szögpontszám szerint indexezve rendre a $C_1, C_2, \dots, C_n, \dots$ jelekkel. (Azaz C_n jelöli az n szögpontú teljes gráfot.)

8. Definíció. Legyenek $C_{i_1}, C_{i_2}, \dots, C_{i_t}$ \mathcal{C} -beli gráfok (nem feltétlenül különbözők) és vezessük be a $C_{i_j} = (P_j, E_j)$ $j=1, 2, \dots, t$ jelölést.

A $C_{i_1}, C_{i_2}, \dots, C_{i_t}$ gráfok t -kompozícióján (jelölése: \boxed{t}) értünk egy olyan $\Gamma = (P, E)$ gráfot, amelyre teljesülnek az alábbiak:

- Γ reguláris gráf
- $P = P_1 \cup P_2 \cup \dots \cup P_t, \quad \forall i \neq j: P_i \cap P_j = \emptyset$
- $E = E_1 \cup E_2 \cup \dots \cup E_t \cup E', \quad \forall i \neq j: E_i \cap E_j = \emptyset,$

ahol E' az úgynevezett kötőélek halmaza.

MEGJEGYZÉSEK. 1. Az E' élhalmaz nem egyértelműen meghatározott.

2. A Γ gráf összefüggőségét E' határozza meg, hiszen ha $E' = \emptyset$, akkor Γ egy teljes részgráfokból álló, t komponensű reguláris gráf, amelyre $i_1 = i_2 = \dots = i_t$.

3. Ha $\Gamma = \Gamma_{n,k}$ és $\max(i_1, i_2, \dots, i_t) = l$, akkor $l \leq k+1$.

6. Tétel. Legyen $\Gamma_n = (P, E)$ n szögpontú összefüggő gráf. Ha létezik Γ_n -ben $\left\lfloor \frac{n}{2} \right\rfloor + 1$ szögpontú teljes részgráf, akkor Γ_n -ben nincs 1-faktor. ($\bar{\Gamma}_n$ a Γ_n gráf komplementer gráfját jelöli.)

BIZONYÍTÁS. Legyen $G=(P', E')$ egy Γ_n -beli $\left\lfloor \frac{n}{2} \right\rfloor + 1$ szögpontú teljes részgráf. Ekkor

$$|P'| = \left\lfloor \frac{n}{2} \right\rfloor + 1 \Rightarrow |P' \setminus P'| = \begin{cases} \left\lfloor \frac{n}{2} \right\rfloor & \text{ha } n \text{ páratlan} \\ \frac{n}{2} - 1 & \text{ha } n \text{ páros.} \end{cases}$$

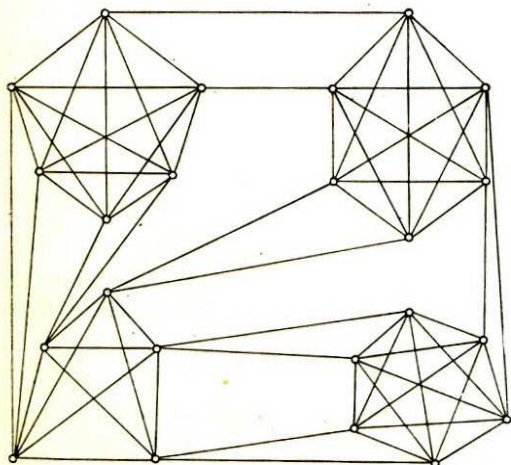
Valamint $\bar{\Gamma}_n$ -ben a P' -beli szögpontok csak $P' \setminus P'$ -beli szögpontokkal lehetnek összekötve, így biztosan van P' -ben legalább egy olyan szögpont, amelynek nincs $P' \setminus P'$ -beli párja, azaz $\bar{\Gamma}_n$ nem tartalmaz 1-faktort.

7. Tétel. Legyen $\Gamma_{n,k} \in \mathcal{PR}_k$, $k \geq 4$. Ha

- $C_{ij} \in \mathcal{C}$ $j = 1, 2, \dots, t \geq 2$.
- $\Gamma_{n,k} = C_{i_1} \overline{[t]} C_{i_2} \overline{[t]} \dots \overline{[t]} C_{i_t}$
- $\frac{k+4}{2} \leq i_j \leq k$ $j = 1, 2, \dots, t \geq 2$

akkor $\Gamma_{n,k}$ VP gráf.

BIZONYÍTÁS. Tekintsünk egy tetszőleges $\Gamma_{n,k}$ -beli p szögpontot. Ekkor a t -kompozíció b) tulajdonságából következik, hogy $\Gamma_{n,k}$ -ban létezik C_{i_j} , melyre $p \in C_{i_j}$ és i_j -re teljesül a tétel 3. feltétele. Ha most a p által generált $\Gamma_{n,k}$ -beli részgráfot tekintjük, akkor ennek k szögpontja van és tartalmazza C_{i_j} -t, amelyre $\frac{k+4}{2} \leq i_j \leq k$ miatt teljesül a 6. tétel feltétele, azaz a p által generált részgráf komplementere nem tartalmaz 1-faktort. Ez azt jelenti, hogy p nem T -tulajdonságú. Mivel p -re nem tettünk kikötést, így ez bármely $\Gamma_{n,k}$ -beli szögpontra teljesül, azaz $\Gamma_{n,k}$ VP gráf. Egy 1., 2., 3. feltételeket kielégítő gráf látható a 7. ábrán.



7. ábra

MEGJEGYZÉSEK. 1. A 7. tétel bizonyításából könnyen adódik, hogy amennyiben $\Gamma_{n,k}$ -ban van olyan $C_{i_j} \in \mathcal{C}$ részgráf, amelyre $i_j = \frac{k}{2} + 1$, akkor $\Gamma_{n,k}$ nem VP gráf. Egy ilyen gráfot mutat a 8. ábra.

2. A 7. tétel magában foglalja a 3. tétel állítását is, így most már tudjuk, hogy nem csak a 3. tételben megkonstruált típusú VP gráfok léteznek bármely k páros számra.

3. Ha a 7. tétel 1. és 3. feltételeit minimális esetben vizsgáljuk, azaz

$$t = 2$$

$$i_1 = i_2 = \frac{k+4}{2},$$

akkor a $\Gamma_{n,k} = C_{i_1} \overline{[t]} C_{i_2}$ VP gráf szögpontjainak számára az $n = k + 4$ értéket kapjuk. Ebből adódik a következő tétel:

8. Tétel. Bármely $k \geq 4$ páros szám esetén létezik $\Gamma_{n,k}$ VP gráf, amelyre $n = k + 4$.

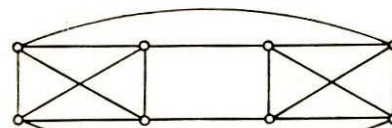
Példaként a 9. ábrán láthatunk egy $\Gamma_{8,4}$ gráfot. Mivel tudjuk, hogy bármely $\Gamma_{n,k} \in \mathcal{PR}$ esetén $n \geq k + 1$ és $\Gamma_{k+1,k}$ teljes gráf lévén nem VP gráf, így felmerül a kérdés, hogy adott k esetén mekkora a legkisebb n_{\min} szám, amelyre létezik $\Gamma_{n,k} \in \mathcal{PR}$ VP gráf.

A 8. tételt figyelembevéve adódik, hogy

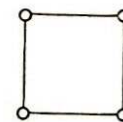
$$(25) \quad k + 2 \leq n_{\min} \leq k + 4$$

9. Tétel. Ha $\Gamma_{n,k} \in \mathcal{PR}_k$ és $n = k + 2$, akkor $\Gamma_{n,k}$ nem VP gráf.

BIZONYÍTÁS. A bizonyítást fokszám szerinti teljes indukcióval végezzük. $k = 2$ esetén a 10. ábrán látható gráfot kapjuk, amelyre az állítás könnyen belátható.



9. ábra



10. ábra

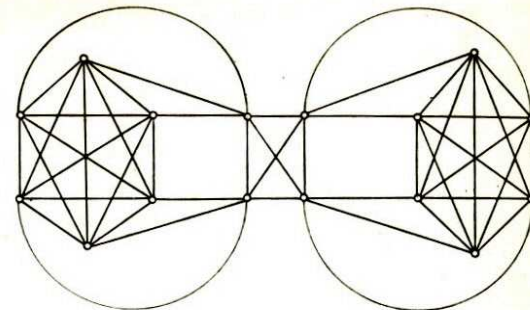
Tegyük fel, hogy $\Gamma_{k,k-2}$ -re igaz az állítás. Tekintsünk egy $\Gamma_{n,k} \in \mathcal{PR}_k$ gráfot, ahol $n = k + 2$ és válasszuk ki ennek tetszőleges p szögpontját. Ekkor könnyű látni, hogy $\Gamma_{n,k}$ tartalmaz pontosan még egy q szögpontot, amelynek szomszédai megegyeznek p szomszédáival, azaz a p és q által generált $\Gamma_{n,k}$ -beli részgráf megegyezik (lásd 11. ábra).

Jelöljük G_p -vel a p , illetve q szögpont által generált $\Gamma_{n,k}$ -beli részgráfot. G_p pontosan k szögpontú, $k - 2$ fokszámú reguláris gráf, amelyre az indukciós feltétel alapján teljesül a tétel állítása, azaz G_p VP gráf.

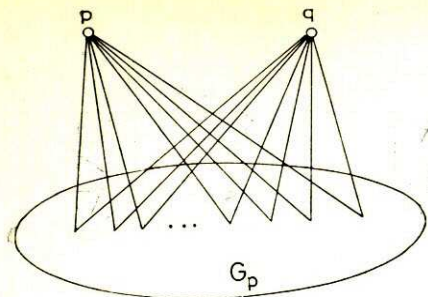
Ennek alapján bármely G_p -beli szögpontot választjuk ki, (jelöljük z -vel), az általa generált G_p -beli részgráf (G'_p) komplementerében van 1-faktor. Jelöljük a z szögpont által generált $\Gamma_{n,k}$ -beli részgráfot G_z -vel. Ekkor G_z pontosan a p és q szögpontokat tartalmazza G'_p szögpontjain kívül, így G_z tartalmazza a (pq) élt, tehát a \bar{G}_p -beli 1-faktor és (pq) pontosan egy \bar{G}_z -beli 1-faktort állít elő, azaz a z szögpont T -tulajdonságú, vagyis $\Gamma_{n,k}$ nem VP gráf.

Ezzel a tételt bebizonyítottuk.

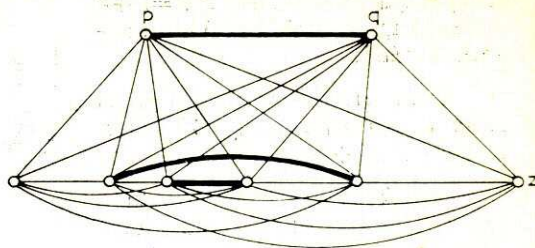
Példaként a 12. ábrán láthatunk egy $\Gamma_{8,8}$ gráfot, amelyen a 9. tételbeli jelöléseket használva bejelöltünk egy z szögponthoz tartozó G_z -beli 1-faktort (vastag vonallal).



8. ábra



11. ábra



12. ábra

10. Tétel. *Bármely $k \geq 2$ szám esetén létezik olyan $\Gamma_{n,k}$ k reguláris gráf, melyre $n = k + 3$ és $\Gamma_{n,k}$ nem tartalmaz 1-faktort.*

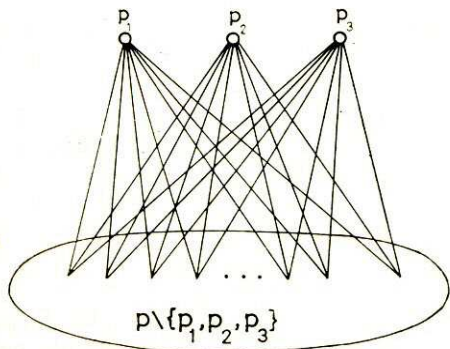
BIZONYÍTÁS. Ha $k \geq 3$, akkor tekintsünk egy n szögpontból álló P szögponthalmazt és válasszunk ki ebből három szögpontot (jelöljük ezeket a p_1, p_2, p_3 jelekkel). Ha most a p_1, p_2, p_3 szögpontokat rendre összekötjük az összes $P \setminus \{p_1, p_2, p_3\}$ halmazbeli szögpontokkal (lásd 13. ábra), akkor e három szögpont fokszáma pontosan $k = n - 3$ lesz, míg a $P \setminus \{p_1, p_2, p_3\}$ halmazbeli szögpontoké pontosan 3. Jelöljük az így keletkező gráfot G_1 -gyel.

Most a $P \setminus \{p_1, p_2, p_3\}$ -beli szögpontokból képezzünk egy tetszőleges $k - 3$ fokszámú reguláris gráfot, melyet G_2 -vel jelölünk. Ha a G_1 és G_2 gráfokat egyesítjük, akkor pontosan egy n szögpontú, $k = n - 3$ fokú reguláris $\Gamma_{n,k}$ gráfot nyerünk. Képezzük a $\bar{\Gamma}_{n,k}$ gráfot. A fenti konstrukció miatt a $\{p_1, p_2, p_3\}$ -beli szögpontok egyáltalán nem lesznek szomszédosak a $P \setminus \{p_1, p_2, p_3\}$ -beli szögpontokkal $\bar{\Gamma}_{n,k}$ -ben, azaz $\bar{\Gamma}_{n,k}$ két komponensre esik szét, amelynek a p_1, p_2, p_3 szögpontokat tartalmazó tagja függetlenül k páros, vagy páratlan voltától, nem tartalmaz 1-faktort, így $\bar{\Gamma}_{n,k}$ sem tartalmazhat 1-faktort.

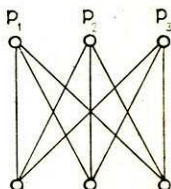
Ha $k = 2$, akkor $n = 5$, amely esetben $\bar{\Gamma}_{n,k}$ a páratlan szögpontszám miatt nem tartalmaz 1-faktort. Ezzel a tételt bebizonyítottuk.

Könnyű belátni, hogy $k = 1$, azaz $n = 4$ esetén a tétel nem igaz.

A tételbeli konstrukcióval a $k = 3$ esetben a jól ismert Kuratowski gráf áll elő (lásd 14. ábra).



13. ábra



14. ábra

A következő tétel módot ad a (25) egyenlőtlenség pontosítására, azaz n_{\min} értékének pontos meghatározására.

11. Tétel. *Bármely $k \geq 6$ páros szám esetén létezik $\Gamma_{n,k} \in \mathcal{PR}_k$ VP gráf, amelyre $n = k + 3$.*

BIZONYÍTÁS. Legyen $\Gamma_{n,k}$ a 10. tétel konstrukciójával keletkező gráf (lásd 13. ábra), azzal a megkötéssel, hogy a (10. tétel jelöléseit használva) G_2 részgráfra teljesüljön, hogy G_2 nem tartalmaz 1-faktort. A 10. tétel alapján ezt feltehetjük, mivel legalább egy ilyen mindig van. Bebizonyítjuk, hogy minden $\Gamma_{n,k}$ -beli szögpont T -tulajdonságú.

Legyen továbbá p tetszőleges $\{p_1, p_2, p_3\}$ -beli és q tetszőleges G_2 -beli szögpont.

1. A p szögpont által generált részgráf pontosan G_2 lesz, amelyről feltettük, hogy \bar{G}_2 -ben nincs 1-faktor, így p nem T -tulajdonságú.

2. Jelöljük a q szögpont által generált részgráfot G_q -val, ekkor G_q szögpontjait a $\{p_1, p_2, p_3\}$ -beli szögpontok és q -nak G_2 -beli szomszédai (jelöljük ezek halmazát K -val) alkotják. Mivel $\{p_1, p_2, p_3\}$ minden egyes eleme szomszédos az összes K -belivel, így \bar{G}_q két komponensre esik szét, amelyek szögponthalmazai $\{p_1, p_2, p_3\}$ és K lesznek. A $\{p_1, p_2, p_3\}$ szögpontokat kifeszítő \bar{G}_q -beli komponens azonban páratlan számú szögpontot tartalmaz, így nem lehet benne 1-faktor, ezért \bar{G}_q -ben sem. Tehát q szintén nem T -tulajdonságú, amivel a tételt bebizonyítottuk.

A 9. és 11. tétel alapján már pontosan tudjuk a (25) egyenlőtlenségben még csak becsült n_{\min} értékét a $k \geq 6$ esetben. Kérdés, hogy mi a helyzet a $k = 2$ és $k = 4$ esetekben?

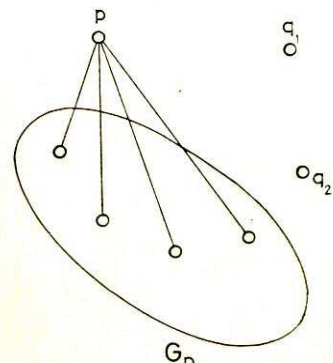
Mivel $k = 2$ esetén $\Gamma_{n,2} \in \mathcal{PR}_2$ pontosan egy Hamilton kör, így könnyű belátni, hogy $\Gamma_{n,2}$ semmilyen n esetén sem VP gráf.

12. Tétel. *Ha $k = 4$ és $n = k + 3$, akkor $\Gamma_{7,4} \in \mathcal{PR}_4$ nem VP gráf.*

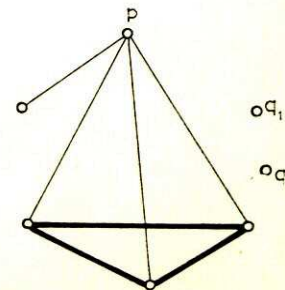
BIZONYÍTÁS. Válasszuk ki $\Gamma_{7,4}$ tetszőleges p pontját és tekintsük a p által generált G_p $\Gamma_{7,4}$ -beli részgráfot. Ha p nem T -tulajdonságú, akkor G_p tartalmazza a p szomszédáiból alkotott négy szögpontú teljes gráf összes 1-faktorainak egy reprezentációját. Ez a 4. ábráról leolvashatóan csak két esetben lehetséges: vagy az a), d), f), g), vagy a b), c), e), h) típusú esetben.

Jelöljük q_1, q_2 -vel $\Gamma_{7,4}$ -nek azokat a pontjait, amelyek nem G_p -beliek, és nem azonosak p -vel (lásd 15. ábra).

Az első esetben G_p az első típusú 1-faktor reprezentációt tartalmazza (lásd 16. ábrán vastag vonallal).



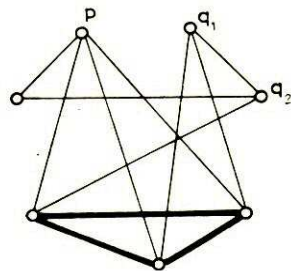
15. ábra



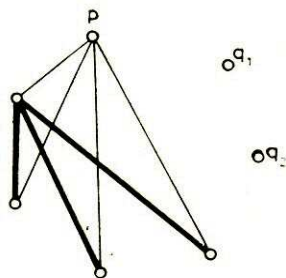
16. ábra

$k=4$ miatt a q_1 (vagy q_2) szögpontnak legalább két reprezentációbeli szögponttal kell szomszédosnak lenni, így q_2 (vagy q_1) számára maximum három szögpont marad szomszédként, azaz ebben az esetben $\Gamma_{7,4}$ nem konstruálható meg (lásd 17. ábra).

A második esetben G_p a második típusú 1-faktor reprezentációt tartalmazza (lásd 18. ábrán vastag vonallal).



17. ábra



18. ábra

Ekkor azonban q_1 és q_2 számára csak egyféle összekötési lehetőség marad (a többi szögponttal) $\Gamma_{7,4}$ megkonstruálásához (lásd 19. ábra), amelyben könnyen található T -tulajdonságú szögpont (a 19. ábrán T -vel jelöltük ezeket).

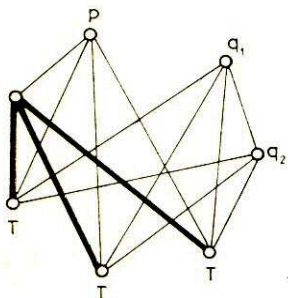
Megjegyezzük, hogy a 10. tételbeli gráf konstrukció jóval általánosabb feltételek mellett is a kívánt tulajdonságú gráfot eredményezi, azonban célunk csak az exisztencia bizonyítása volt, amihez ez is elegendőnek bizonyult.

A 8., 11. és 12. tétel alapján már pontosíthatjuk a (25) egyenlőtlenséget és kimondhatjuk az alábbi tételt:

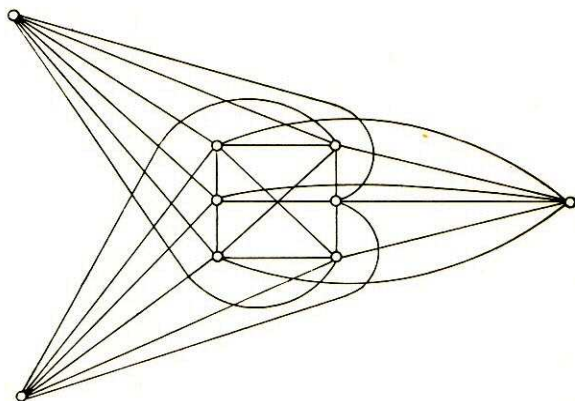
13. Tétel. *Bármely $k \geq 4$ páros szám esetén a legkisebb n_{\min} szám, amelyre $\Gamma_{n_{\min}, k} \in \mathcal{PR}_k$ VP gráf*

$$(26) \quad n_{\min} = \begin{cases} k+3 & \text{ha } k \geq 6 \\ k+4 & \text{ha } k = 4. \end{cases}$$

A 13. tétel illusztrálására a $k=4$ eset a 19. ábrán látható, a $k=6$ esetre pedig a 20. ábrán mutatunk be egy példát.



19. ábra



20. ábra

IRODALOM

- [1] C. BERGE: *Graphs and hypergraphs* North-Holland, 1973.
- [2] G. A. DIRAC: Some theorems on abstract graphs *Proc. London Math. Soc.* (3), 2 (1952), 69—81.
- [3] ERDŐS P., RÉNYI A.: On the evolution of random graphs. *MTA Matematikai Kutató Int. közleményei* V. évf. A sorozat 1—2 füzet, 1960.

«ЭВОЛЮЦИЯ» РЕГУЛЯРНЫХ ГРАФОВ ЧЁТНОГО ПОРЯДКА ПО ИХ ВЕРШИНАМ

ТАМАШ ДЕНЕШ

THE "EVOLUTION" OF REGULAR GRAPHS

T. DÉNES