Dénes-féle Szimmetrikus prímszám tétel alkalmazása annak bizonyítására, hogy *létezik végtelen sok n^2+1 alakú prímszám*

Dénes Tamás matematikus-kriptográfus
Email: tdenest@freemail.hu

Abstract

A [Dénes 2017] dolgozatban bizonyított Dénes-féle Szimmetrikus prímszám tétel felhasználásával bebizonyítjuk, hogy *létezik végtelen sok n^2+1 alakú prímszám*.

----- . -----

1. Definíció *(szimmetrikus prímpár)*

Legyenek $N \geq 4$ és $0 \leq m_N \leq N/2$ természetes számok. Ha $p_{N-} = N - m_N$ és $p_{N+} = N + m_N$ prímszámok, akkor ezeket N-re *szimmetrikus prímpárnak* nevezzük.

1. Tétel

Bármely két p és q prímszámhoz létezik N és m_N természetes szám, hogy p és q N-re szimmetrikus prímpár.

BIZONYÍTÁS

A [Dénes 2001] dolgozatban bizonyított 1. tétel szerint, ha p és q prímek, akkor $p=6k\pm 1$ és $q=6r\pm 1$ alakú, ahol k és r természetes számok. Tehát a következő esetek állhatnak elő, amelyek az $N = \frac{p+q}{2}$ értékre mindig természetes számok:

(1) $N = \frac{p+q}{2} = \frac{(6k+1)+(6r+1)}{2} = \frac{6(k+r)+2}{2} = 3(k+r)+1 \quad (k=1,2,3,\ldots),\ (r=1,2,3,\ldots)$

(2) $N = \frac{p+q}{2} = \frac{(6k+1)+(6r-1)}{2} = \frac{6(k+r)}{2} = 3(k+r) \quad (k=1,2,3,\ldots),\ (r=1,2,3,\ldots)$

(3) $N = \frac{p+q}{2} = \frac{(6k-1)+(6r+1)}{2} = \frac{6(k+r)}{2} = 3(k+r) \quad (k=1,2,3,\ldots),\ (r=1,2,3,\ldots)$

(4) $N = \frac{p+q}{2} = \frac{(6k-1)+(6r-1)}{2} = \frac{6(k+r)-2}{2} = 3(k+r)-1 \quad (k=1,2,3,\ldots),\ (r=1,2,3,\ldots)$

Válasszuk az (1)-(4)-ben kiszámított N értékekhez a következő m_N értékeket:

(5) $m_N = \frac{|p-q|}{2} = \frac{|(6k+1)-(6r+1)|}{2} = \frac{6|(k-r)|}{2} = 3|(k-r)| \quad (k=1,2,\ldots),\ (r=1,2,\ldots)$

(6) $m_N = \frac{|p-q|}{2} = \frac{|(6k+1)-(6r-1)|}{2} = \frac{6|(k-r)|+2}{2} = 3|(k-r)|+1 \quad (k=1,2,\ldots),\ (r=1,2,\ldots)$

(7) $m_N = \frac{|p-q|}{2} = \frac{|(6k-1)-(6r+1)|}{2} = \frac{6|(k-r)|-2}{2} = 3|(k-r)|-1 \quad (k=1,2,\ldots),\ (r=1,2,\ldots)$

***Dénes Tamás** matematikus-kriptográfus* Email: tdenest@freemail.hu

(8) $m_N = \frac{|p-q|}{2} = \frac{|(6k-1)-(6r-1)|}{2} = \frac{6|(k-r)|}{2} = 3|(k-r)|$ ($k=1,2,\ldots$), ($r=1,2,\ldots$)

Az (1)-(4) és (5)-(8) összefüggésekből kapjuk:

(9)
$$N - m_N \overset{(1),(5)}{=} 3(k+r)+1-3(k-r) = 6r+1 = q$$
$$N + m_N \overset{(1),(5)}{=} 3(k+r)+1+3(k-r) = 6k+1 = p$$
($k=1,2,3,\ldots$), ($r=1,2,3,\ldots$)

(10)
$$N - m_N \overset{(2),(6)}{=} 3(k+r)-(3(k-r)+1) = 6r-1 = q$$
$$N + m_N \overset{(2),(6)}{=} 3(k+r)+(3(k-r)+1) = 6k+1 = p$$
($k=1,2,3,\ldots$), ($r=1,2,3,\ldots$)

(11)
$$N - m_N \overset{(3),(7)}{=} 3(k+r)-(3(k-r)-1) = 6r+1 = q$$
$$N + m_N \overset{(3),(7)}{=} 3(k+r)+(3(k-r)-1) = 6k-1 = p$$
($k=1,2,3,\ldots$), ($r=1,2,3,\ldots$)

(12)
$$N - m_N \overset{(4),(8)}{=} 3(k+r)-1-3(k-r) = 6r-1 = q$$
$$N + m_N \overset{(4),(8)}{=} 3(k+r)-1+3(k-r) = 6k-1 = p$$
($k=1,2,3,\ldots$), ($r=1,2,3,\ldots$)

A (9)-(12) összefüggések pontosan eleget tesznek a [Dénes 2017]-ben bizonyított Dénes-féle Szimmetrikus prímszám tételnek.

Q.E.D.

Az 1. Tétel következménye a következő 2. Tétel:

2. Tétel

Bármely p prímszámhoz létezik N és m_N természetes szám, hogy $p=N-m_N$ és $q=N+m_N$ prímszám.

----- . -----

A következő 3. Tétel bizonyításához felhasználjuk az alábbi ismert összefüggést:

(13)
$$\sum_{i=1}^{n}(2i-1) = 2\left(\sum_{i=1}^{n} i\right) - n = \frac{2n(n-1)}{2} - n = 1+3+5+\ldots+(2n-3)+(2n-1) = n^2$$

Ebből következik, hogy

(14)
$$\frac{2n(n-1)-2n}{2} + 1 = 2n \cdot \frac{n}{2} + 1 = 1+3+5+\ldots+(2n-3)+2n = n^2+1$$

Dénes Tamás *matematikus-kriptográfus* Email: tdenest@freemail.hu

3. Tétel

Létezik végtelen sok $p=n^2+1$ alakú prímszám.

Bizonyítás (indirekt)

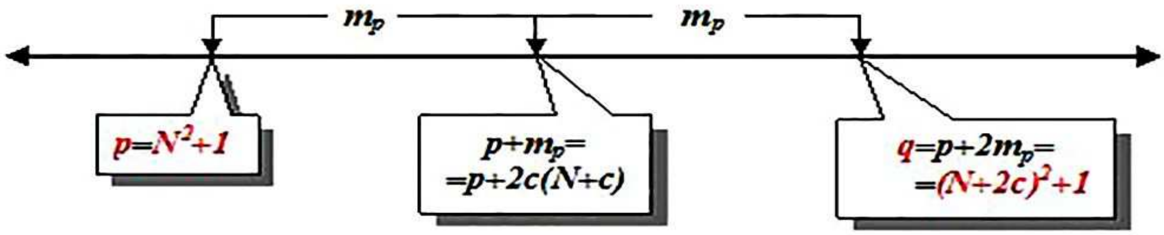
Tegyük fel, hogy N az utolsó természetes szám, amelyre $p=N^2+1$ prímszám.
Mivel p prímszám, így N^2+1 páratlan, ezért elegendő a bizonyítást csak páros $n>N$-re vizsgálni. Ekkor az indirekt feltétel így írható fel:

(15) $$\forall c \geq 1 \quad \Rightarrow \quad q = (\underbrace{N+2c}_{n})^2 + 1 \ \ \textbf{\textit{nem prímszám}} \quad (c \text{ egész szám})$$

(16) $$q = (\underbrace{N+2c}_{n})^2 + 1 = \underbrace{N^2+1}_{p} + 4Nc + 4c^2 = p + 4c(N+c)$$

Ekkor a fenti 2. Tétel szerint létezik olyan c természetes szám, amelyre

(17) $$m_p = 2c(N+c) \quad \Rightarrow \quad q = p + 2m_p \overset{(16)}{=} (\underbrace{N+2c}_{n\rangle N})^2 + 1 \ \ \textit{prímszám} \quad (\text{lásd az 1. ábrát})$$



1. ábra

Ez azonban ellentmond a (15) indirekt feltevésnek.

Q.E.D.

Dénes Tamás *matematikus-kriptográfus* Email: tdenest@freemail.hu

Az első tíz és az első néhány 1 milliónál nagyobb n^2+1 alakú prímszám fentiek szerinti kiszámítását mutatja be az 1. Táblázat.

1. Táblázat

N	$p=N^2+1$	c	$m_p=2c(N+c)$	$q=p+2m_p$	$q=(N+2c)^2+1$	Szimmetr. prímek
2	**5** prím	**1**	**6**	17	**17** prím	*
4	**17** prím	**1**	**10**	37	**37** prím	*
6	37 prím	1	14	65	65=5x13	
6	**37** prím	**2**	**32**	101	**101** prím	*
10	101 prím	1	22	145	145=5x29	
10	**101** prím	**2**	**48**	197	**197** prím	*
14	**197** prím	**1**	**30**	257	**257** prím	*
16	257 prím	1	34	325	$325=5^2x13$	
16	**257** prím	**2**	**72**	401	**401** prím	*
20	401 prím	1	42	485	485=5x97	
20	**401** prím	**2**	**88**	577	**577** prím	*
24	**577** prím	**1**	**50**	677	**677** prím	*
26	677 prím	1	54	785	785=5x157	
26	677 prím	2	112	901	901=17x53	
26	677 prím	3	174	1.025	$1.025=5^2x41$	
26	677 prím	4	240	1.157	1.157=13x89	
26	**677** prím	**5**	**310**	1.297	**1.297** prím	*
36	1.297 prím	1	74	1.445	$1.445=5x17^2$	
36	**1.297** prím	**2**	**152**	1.601	**1.601** prím	*
...						
1.004	1.008.017 prím	1	2.010	1.012.037	1.012.037=13x77.849	
1.004	1.008.017 prím	2	4.024	1.016.065	1.016.065=5x203.213	
1.004	**1.008.017** prím	**3**	**6.042**	1.020.101	**1.020.101** prím	*
1.010	1.020.101 prím	1	2.022	1.024.145	1.024.145=5x257x797	
1.010	1.020.101 prím	2	4.048	1.028.197	1.028.197=109x9.433	
1.010	1.020.101 prím	3	6.078	1.032.257	1.032.257=17x41x1.481	
1.010	1.020.101 prím	4	8.112	1.036.325	$1.036.325=5^2x41.453$	
1.010	1.020.101 prím	5	10.150	1.040.401	1.040.401=101x10.301	
1.010	1.020.101 prím	6	12.192	1.044.485	1.044.485=5x13x16.069	
1.010	1.020.101 prím	7	14.238	1.048.577	1.048.577=17x61.681	
1.010	1.020.101 prím	8	16.288	1.052.677	1.052.677=61x17.257	
1.010	1.020.101 prím	9	18.342	1.056.785	1.056.785=5x241x877	
1.010	1.020.101 prím	10	20.400	1.060.901	1.060.901=37x53x541	
1.010	1.020.101 prím	11	22.462	1.065.025	$1.065.025=5^2x13x29x113$	
1.010	1.020.101 prím	12	24.528	1.069.157	1.069.157=41x89x293	
1.010	**1.020.101** prím	**13**	**26.598**	1.073.297	**1.073.297** prím	*
...						

Dénes Tamás *matematikus-kriptográfus* Email: tdenest@freemail.hu

N	*p=N²+1*	*c*	m_p=2c(N+c)	q=p+2m_p	q=(N+2c)²+1	Szimmetr. prímek
3.624	13.133.377 prím	1	7.250	13.147.877	13.147.877=101x349x373	
3.624	13.133.377 prím	2	14.504	13.162.385	13.162.385=5x2.632.477	
3.624	13.133.377 prím	3	21.762	13.176.901	13.176.901=109x120.889	
3.624	13.133.377 prím	4	29.024	13.191.425	13.191.425=5x13x37x1.097	
3.624	13.133.377 prím	5	36.290	13.205.957	13.205.957=17x53x14.657	
3.624	13.133.377 prím	6	43.560	13.220.497	13.220.497=397x33.301	
3.624	13.133.377 prím	7	50.834	13.235.045	13.235.045=5x2.647.009	
3.624	13.133.377 prím	8	58.112	13.249.601	13.249.601=41x461x701	
3.624	13.133.377 prím	9	65.394	13.264.165	13.264.165=5x17x29x5.381	
3.624	**13.133.377** prím	**10**	***72.680***	13.278.737	**13.278.737** prím	*
…						
3.894	15.163.237 prím	1	7.790	15.178.817	15.178.817=73x337x617	
3.894	15.163.237 prím	2	15.584	15.194.405	15.194.405=5x29x104.789	
3.894	**15.163.237** prím	**3**	***23.382***	15.210.001	**15.210.001** prím	*
3.900	15.210.001 prím	1	7.802	15.225.605	15.225.605=5x97x31.393	
3.900	15.210.001 prím	2	15.608	15.241.217	15.241.217=41x371.737	
3.900	15.210.001 prím	3	23.418	15.256.837	15.256.837=17x897.461	
3.900	15.210.001 prím	4	31.232	15.272.465	15.272.465=5x13x234.961	
3.900	**15.210.001** prím	**5**	***39.050***	15.288.101	**15.288.101** prím	*

Hivatkozások

[Dénes 2001] Dénes, Tamás: *Complementary prime-sieve*
PUre Mathematics and Applications, Vol.12 (2001), No. 2, pp. 197-207
http://www.titoktan.hu/_raktar/_e_vilagi_gondolatok/PUMA-CPS.pdf
http://www.titoktan.hu/_raktar/_e_vilagi_gondolatok/KomplementerPrimszita.pdf

[Dénes 2017] Dénes, Tamás: *Dénes type Symmetric Prime Number theorem and its application to proof of the Even Goldbach conjecture*
http://www.titoktan.hu/_raktar/_e_vilagi_gondolatok/DT-SzimmPrimTetel.pdf
http://www.titoktan.hu/_raktar/_e_vilagi_gondolatok/DT-SymmPrime-theorem.pdf