Dénes-féle Szimmetrikus prímszám tétel
és alkalmazása a páros Goldbach-sejtés bizonyítására

Dénes Tamás matematikus-kriptográfus
Email: tdenest@freemail.hu

Abstract

A dolgozatban bizonyított tétel szerint, minden $N \geq 4$ természetes számhoz létezik $m_N \geq 0$ természetes szám, hogy $p_{N-} = N - m_N$ és $p_{N+} = N + m_N$ prímszámok (Dénes-féle Szimmetrikus prímszám tétel). E tétel közvetlen következményeként adódik a páros Goldbach-sejtés bizonyítása, amelyet így 275 év után Goldbach-tételnek nevezhetünk.

----- . -----

1. Tétel *(Dénes-féle Szimmetrikus prímszám tétel)*

Minden $N \geq 4$ természetes számhoz létezik $m_N \geq 0$ természetes szám, hogy $p_{N-} = N - m_N$ és $p_{N+} = N + m_N$ prímszámok.

Az 1. tétel ekvivalens megfogalmazása:

Minden N természetes számhoz létezik $m_N \geq 0$ természetes szám, hogy N előáll a p_{N-} és p_{N+} prímszámok számtani közepeként, azaz

(s0) $$N = \frac{p_{N-} + p_{N+}}{2}$$

BIZONYÍTÁS

$N = 4 \Rightarrow m_N = 1 \Rightarrow \quad p_{N-} = 4 - 1 = 3, \quad p_{N+} = 4 + 1 = 5$

$N = 5 \Rightarrow m_N = 2 \Rightarrow \quad p_{N-} = 5 - 2 = 3, \quad p_{N+} = 5 + 2 = 7$

Tehát a tétel $N=4$ és $N=5$ esetén igaz.

A [Dénes 2001]-ben bizonyított 1. tétel miatt, bármely $N \geq 6$ esetén az alábbiak valamelyike teljesül:

(s1) $p_{N-} = 6k - 1$ *és* $p_{N+} = 6r - 1$ $(k=1,2,3,\ldots),\ (r=1,2,3,\ldots)$

(s2) $p_{N-} = 6k - 1$ *és* $p_{N+} = 6r + 1$ $(k=1,2,3,\ldots),\ (r=1,2,3,\ldots)$

(s3) $p_{N-} = 6k + 1$ *és* $p_{N+} = 6r - 1$ $(k=1,2,3,\ldots),\ (r=1,2,3,\ldots)$

(s4) $p_{N-} = 6k + 1$ *és* $p_{N+} = 6r + 1$ $(k=1,2,3,\ldots),\ (r=1,2,3,\ldots)$

Az (s1)-(s4) összefüggésekből N-re és m_n-re a következőket kapjuk:

(s5)
$$\begin{aligned} &(s1) \Rightarrow \quad p_{N-} = 6k - 1 = N - m_N \;\Rightarrow\quad m_N = N - 6k + 1 \Rightarrow \\ &\quad \Rightarrow \quad p_{N+} = 6r - 1 = N + N - 6k + 1 \;\Rightarrow\quad 0 = 2N - 6k - 6r + 2 \Rightarrow \\ &\quad \Rightarrow \quad N = 3(k + r) - 1 \quad \Rightarrow m_N = 3(r - k) \end{aligned}$$

***Dénes Tamás** matematikus-kriptográfus* Email: tdenest@freemail.hu

(s6)
$$(s2) \Rightarrow \quad p_{N-} = 6k-1 = N - m_N \Rightarrow \quad m_N = N - 6k + 1 \Rightarrow$$
$$\Rightarrow \quad p_{N+} = 6r+1 = N + N - 6k + 1 \Rightarrow \quad 0 = 2N - 6k - 6r \Rightarrow$$
$$\Rightarrow \quad N = 3(k+r) \quad \Rightarrow m_N = 3(r-k)+1$$

(s7)
$$(s3) \Rightarrow \quad p_{N-} = 6k+1 = N - m_N \Rightarrow \quad m_N = N - 6k - 1 \Rightarrow$$
$$\Rightarrow \quad p_{N+} = 6r-1 = N + N - 6k - 1 \Rightarrow \quad 0 = 2N - 6k - 6r \Rightarrow$$
$$\Rightarrow \quad N = 3(k+r) \quad \Rightarrow m_N = 3(r-k)-1$$

(s8)
$$(s4) \Rightarrow \quad p_{N-} = 6k+1 = N - m_N \Rightarrow \quad m_N = N - 6k - 1 \Rightarrow$$
$$\Rightarrow \quad p_{N+} = 6r+1 = N + N - 6k - 1 \Rightarrow \quad 0 = 2N - 6k - 6r - 2 \Rightarrow$$
$$\Rightarrow \quad N = 3(k+r)+1 \quad \Rightarrow m_N = 3(r-k)$$

Könnyen belátható, hogy (s5)-(s8) előállítja az *N=3u-1*, *N=3u*, *N=3u+1* alakú természetes számokat. A kimaradt *N=3u-2* és *N=3u+2* alakok ezekre visszavezethetők az alábbi módon:

(s9) *N=3u-2=3u-2-1+1=3(u-1)+1*, ami megfelel (s8)-nak, ha *k+r=u-1*

(s10) *N=3u+2=3u+2+1-1=3(u+1)-1*, ami megfelel (s5)-nek, ha *k+r=u+1*

Tehát az (s5)-(s8) összefüggések előállítják az összes *N* természetes számot!

Továbbiakban bizonyítandó, hogy bármely *N*, illetve m_N esetén az (s5)-(s8) esetek valamelyikében van olyan p_{N-}, p_{N+} pár, hogy mindkettő prímszám. A fentiekre néhány példát mutat be az 1. Táblázat.

1. Táblázat

N			**k+r**	**k**	**r**	m_N	p_{N-}	p_{N+}
10	(s8)	N=3(k+r)+1	3	1	2	3(r-k)=**3**	6k+1=7(prím)	6r+1=13(prím)
15	(s6)	N=3(k+r)	5	1	4	3(r-k)+1=10	6k-1=5(prím)	6r+1=25=5x5 (nem prím)
			5	2	3	3(r-k)+1=**4**	6k-1=11(prím)	6r+1=19(prím)
15	(s7)	N=3(k+r)	5	1	4	3(r-k)-1=**8**	6k+1=7(prím)	6r-1=23(prím)
			5	2	3	3(r-k)-1=**2**	6k+1=13(prím)	6r-1=17(prím)
82	(s8)	N=3(k+r)+1	27	1	26	3(r-k)=**75**	6k+1=7(prím)	6r+1=157(prím)
99	(s6)	N=3(k+r)	33	1	32	3(r-k)+1=**94**	6k-1=5(prím)	6r+1=193(prím)
			33	2	31	3(r-k)+1=88	6k-1=11(prím)	6r+1=187=11x17 (nem prím)
			33	3	30	3(r-k)+1=**82**	6k-1=17(prím)	6r+1=181(prím)
100	(s8)	N=3(k+r)+1	33	3	30	3(r-k)=**81**	6k+1=19(prím)	6r+1=181(prím)
5.689	(s8)	N=3(k+r)+1	1.896	926	970	3(r-k)=**132**	6k+1=5.557 (prím)	6r+1=5.821(prím)
				10	1.886	3(r-k)=**5.628**	6k+1=61(prím)	6r+1=11.317(prím)
8. 956. 732	(s8)	N=3(k+r)+1	2.985.577	1.492.761	1.492.816	3(r-k)=**165**	6k+1=8.956.567 (prím)	6r+1=8.956.897 (prím)

Dénes Tamás *matematikus-kriptográfus* Email: tdenest@freemail.hu

Bizonyítás folytatása (indirekt)

Mivel p_{N-} bármely N-nél kisebb prímszám lehet, ezért tegyük fel, hogy az (s5)-(s8) esetekben van olyan N, amelyre

(s11) $\forall m_N \langle N \Rightarrow p_{N-} = N - m_N \ (prím) \Rightarrow p_{N+} = N + m_N = p_{N-} + 2m_N \ (nem \ prím)$

Ekkor a [Dénes 2001]-ben bizonyított 2. tétel miatt, p_{N+}-ra az alábbiak valamelyike teljesül:

(s12) $p_{N+} = 6r - 1$ és r=6uv+u-v (u=1,2,3, …), (v=1,2,3,…)

(s13) $p_{N+} = 6r - 1$ és r=6uv-u+v (u=1,2,3, …), (v=1,2,3,…)

(s14) $p_{N+} = 6r + 1$ és r=6uv+u+v (u=1,2,3, …), (v=1,2,3,…)

(s15) $p_{N+} = 6r + 1$ és r=6uv-u-v (u=1,2,3, …), (v=1,2,3,…)

(s11) és (s12) alapján adódik:

(s16)
$$p_{N+} = p_{N-} + 2m_N = 6(6uv + u - v) - 1 \Rightarrow \quad m_N = 3(6uv + u - v) - \frac{p_{N-} + 1}{2} \quad \Rightarrow$$
$$\Rightarrow \quad N = p_{N-} + m_N = p_{N-} + 3(6uv + u - v) - \frac{p_{N-} + 1}{2} = \frac{p_{N-} + 6(6uv + u - v) - 1}{2}$$

(s11) és (s13) alapján adódik:

(s17)
$$p_{N+} = p_{N-} + 2m_N = 6(6uv - u + v) - 1 \Rightarrow \quad m_N = 3(6uv - u + v) - \frac{p_{N-} + 1}{2} \quad \Rightarrow$$
$$\Rightarrow \quad N = p_{N-} + m_N = p_{N-} + 3(6uv - u + v) - \frac{p_{N-} + 1}{2} = \frac{p_{N-} + 6(6uv - u + v) - 1}{2}$$

(s11) és (s14) alapján adódik:

(s18)
$$p_{N+} = p_{N-} + 2m_N = 6(6uv + u + v) + 1 \Rightarrow \quad m_N = 3(6uv + u + v) - \frac{p_{N-} - 1}{2} \quad \Rightarrow$$
$$\Rightarrow \quad N = p_{N-} + m_N = p_{N-} + 3(6uv + u + v) - \frac{p_{N-} - 1}{2} = \frac{p_{N-} + 6(6uv + u + v) + 1}{2}$$

(s11) és (s15) alapján adódik:

(s19)
$$p_{N+} = p_{N-} + 2m_N = 6(6uv - u - v) + 1 \Rightarrow \quad m_N = 3(6uv - u - v) - \frac{p_{N-} - 1}{2} \quad \Rightarrow$$
$$\Rightarrow \quad N = p_{N-} + m_N = p_{N-} + 3(6uv - u - v) - \frac{p_{N-} - 1}{2} = \frac{p_{N-} + 6(6uv - u - v) + 1}{2}$$

Mivel az indirekt feltevés miatt az (s11) állításnak, az adott N esetén minden m_N<N-re teljesülnie kell, ezért elegendő megmutatni, hogy *nincs olyan N*, amelyre az (s16)-(s19) egyenlőségek mindegyike teljesül. Ekkor ugyanis teljesülnie kell a következő (s20), (s22), (s23), (s25), (s26), (s27) egyenleteknek:

(s20)
$$N \overset{(s16)}{=} \frac{p_{N-} + 6(6uv + u - v) - 1}{2} \overset{(s17)}{=} \frac{p_{N-} + 6(6uv - u + v) - 1}{2} \quad \Rightarrow \quad u = v$$

Dénes Tamás *matematikus-kriptográfus* Email: tdenest@freemail.hu

Az u=v eredményt behelyettesítve az (s16)-(s19) egyenletekbe, p_{N+}-ra a következőket kapjuk:

(s21)

$$u=v \overset{(s16),(s17)}{\Rightarrow} p_{N+}=p_{N-}+2\left(3\cdot 6u^2-\frac{p_{N-}+1}{2}\right)=p_{N-}+36u^2-p_{N-}-1=$$
$$=36u^2-1=(6u-1)(6u+1)$$
$$u=v \overset{(s18)}{\Rightarrow} p_{N+}=p_{N-}+2\left(3(6u^2+2u)-\frac{p_{N-}-1}{2}\right)=p_{N-}+36u^2+12u-p_{N-}+1=$$
$$=36u^2+12u+1=(6u+1)^2$$
$$u=v \overset{(s19)}{\Rightarrow} p_{N+}=p_{N-}+2\left(3(6u^2-2u)-\frac{p_{N-}-1}{2}\right)=p_{N-}+36u^2-12u-p_{N-}+1=$$
$$=36u^2-12u+1=(6u-1)^2$$

(s21)-ből látható, hogy u=v esetén p_{N+} soha sem prímszám, azaz teljesül az (s11) indirekt feltétel.

(s22)

$$N\overset{(s16)}{=}\frac{p_{N-}+6(6uv+u-v)-1}{2}\overset{(s18)}{=}\frac{p_{N-}+6(6uv+u+v)+1}{2} \Rightarrow$$
$$\Rightarrow 6(6uv+u-v-6uv-u-v)=2 \Rightarrow v=-\frac{1}{6}$$

Az (s12)-(s15) feltételek szerint v természetes szám, így az (s22) eset nem állhat elő.

(s23)

$$N\overset{(s16)}{=}\frac{p_{N-}+6(6uv+u-v)-1}{2}\overset{(s19)}{=}\frac{p_{N-}+6(6uv-u-v)+1}{2} \Rightarrow$$
$$\Rightarrow 6(6uv+u-v-6uv+u+v)=2 \Rightarrow u=\frac{1}{6}$$

Az $u=\frac{1}{6}$ eredményt behelyettesítve az (s16)-(s19) egyenletekbe, p_{N+}-ra a következőket kapjuk:

(s24)

$$u=\frac{1}{6} \overset{(s16),(s17)}{\Rightarrow} p_{N+}=p_{N-}+2\left(3(v+\frac{1}{6}-v)-\frac{p_{N-}+1}{2}\right)=p_{N-}+1-p_{N-}-1=0$$
$$u=\frac{1}{6} \overset{(s18)}{\Rightarrow} p_{N+}=p_{N-}+2\left(3(v+\frac{1}{6}+v)-\frac{p_{N-}-1}{2}\right)=p_{N-}+12v+1-p_{N-}+1=$$
$$=2(6v+1)$$
$$u=\frac{1}{6} \overset{(s19)}{\Rightarrow} p_{N+}=p_{N-}+2\left(3(v-\frac{1}{6}-v)-\frac{p_{N-}-1}{2}\right)=p_{N-}-1-p_{N-}+1=0$$

Dénes Tamás _matematikus-kriptográfus_ Email: tdenest@freemail.hu

(s25)
$$N \overset{(s17)}{=} \frac{p_{N-}+6(6uv-u+v)-1}{2} \overset{(s18)}{=} \frac{p_{N-}+6(6uv+u+v)+1}{2} \Rightarrow$$
$$\Rightarrow 6(6uv-u+v-6uv-u-v)=2 \quad \Rightarrow \quad u=-\frac{1}{6}$$

Az (s12)-(s15) feltételek szerint u természetes szám, így az (s25) eset nem állhat elő.

(s26)
$$N \overset{(s17)}{=} \frac{p_{N-}+6(6uv-u+v)-1}{2} \overset{(s19)}{=} \frac{p_{N-}+6(6uv-u-v)+1}{2} \Rightarrow$$
$$\Rightarrow 6(6uv-u+v-6uv+u+v)=2 \quad \Rightarrow \quad v=\frac{1}{6}$$

Mivel u és v az (s12)-(s15) feltételekben szimmetrikus, így ez az eset az (s24)-beli eredményeket adja.

(s27) $$N \overset{(s18)}{=} \frac{p_{N-}+6(6uv+u+v)+1}{2} \overset{(s19)}{=} \frac{p_{N-}+6(6uv-u-v)+1}{2} \Rightarrow \quad u=-v$$

Az (s12)-(s15) feltételek szerint u és v természetes számok, azonban (s27) szerint az egyikük mindenképpen negatív, így ez az eset nem állhat elő.

Az (s22)-(s27) levezetésekből világos, hogy adott N-re $u \neq v$ esetén nem minden m_N-re teljesül az (s11) indirekt feltétel, ami éppen a tétel állítását igazolja. Példaként lásd az 1. táblázat 7.-9. sorát az N=*99* esetre.

Q.E.D.

Néhány példa a tétel illusztrálására

(s28) $$N=99 \quad r=31 \overset{(s15)}{=} 6uv-u-v \quad \Rightarrow \quad u=2 \quad v=3$$

(s29) $$N=15 \quad r=4 \overset{(s15)}{=} 6uv-u-v \quad \Rightarrow \quad u=v=1$$

(s30) $$p_{N+}=6r+1 \quad \wedge \quad r \overset{(s14)}{=} 6uv+u+v$$
$$\textit{Ha például} \quad p_{N-}=5 \wedge k=1 \wedge r=32 \ (\textit{lásd 1.táblázat 7.sor}) \quad \Rightarrow$$

Ha u=v, akkor

(s31) $$\overset{(s30)}{\Rightarrow} r=6u^2+2u=32 \Rightarrow 3u^2+u-16=0 \Rightarrow \quad u_{1,2}=\frac{-1\pm\sqrt{1+4\cdot 3\cdot 16}}{6}=\frac{-1\pm\sqrt{193}}{6}$$

Mivel u és v természetes számok, ez nem megoldás.

Dénes Tamás *matematikus-kriptográfus* Email: tdenest@freemail.hu

Ha *u≠v*, akkor a következő esetek lehetségesek:

$$u=1 \wedge v=2 \overset{(s30)}{\Rightarrow} r=15 \neq 32$$
$$u=1 \wedge v=3 \overset{(s30)}{\Rightarrow} r=22 \neq 32$$
(s32) $$u=1 \wedge v=4 \overset{(s30)}{\Rightarrow} r=29 \neq 32$$
$$u=1 \wedge v=5 \overset{(s30)}{\Rightarrow} r=36 \neq 32$$
$$u=2 \wedge v=3 \overset{(s30)}{\Rightarrow} r=41 \neq 32$$

A Dénes-féle Szimmetrikus prímszám tétel következménye a páros Goldbach-sejtés bizonyítása

A tétel (s0) megfogalmazásából következik, hogy minden *N≥4* természetes számra és a $p_{N-}=N-m_N$, $p_{N+}=N+m_N$ prímekre igaz, hogy

(s33) $$2N = p_{N-} + p_{N+}$$

Azaz minden páros szám előáll két prímszám összegeként. Ezzel bizonyítottá vált ***az erős (páros) Goldbach sejtés,*** amelyet ezután ***Goldbach-tételnek*** nevezhetünk.[1]

2. Táblázat *(Példák a Dénes-féle Szimmetrikus prímszám tétel és a Goldbach-tétel illusztrálására)*

2N	**N**	m_N	$p_{N-}=N-m_N$	$p_{N+}=N+m_N$
8	4	1	**3**=4-1	**5**=4+1
10	5	0	**5**=5-0	**5**=5+0
20	10	3	**7**=10-3	**13**=10+3
30	15	2	**13**=15-2	**17**=15+2
32	16	3	**13**=16-3	**19**=16+3
100	50	3	**47**=50-3	**53**=50+3
112	56	3	**53**=56-3	**59**=56+3
202	101	0	**101**=101-0	**101**=101+0
1.000	500	9	**491**=500-9	**509**=500+9
10.000	5.000	81	**4.919**=5.000-81	**5.081**=5.000+81
100.000	50.000	123	**49.877**=50.000-123	**50.123**=50.000+123
1.000.000	500.000	57	**499.943**=500.000-57	**500.057**=500.000+57
8.000.000	4.000.000	237	**3.999.763**=4.000.000-237	**4.000.237**=4.000.000+237
10.000.000	5.000.000	87	**4.999.913**=5.000.000-87	**5.000.087**=5.000.000+87
30.800.000	15.400.000	237	**15.399.763**=15.400.000-237	**15.400.237**=15.400.000+237
30.971.720	15.485.860	3	**15.485.857**=15.485.860-3	**15.485.863**=15.485.860+3

[1] **Erős (páros) Goldbach-sejtés (1742):** *Minden 2-nél nagyobb páros szám előáll két prímszám összegeként.*

Dénes Tamás *matematikus-kriptográfus* Email: tdenest@freemail.hu

2. TÉTEL

Minden *ikerprím pár* kielégíti a Dénes-féle Szimmetrikus prímszám tételt.

BIZONYÍTÁS

Legyenek p_1 és p_2 ikerprímek, ekkor

$p_2 = p_1 + 2$ *és* $N = p_1 + 1 \Rightarrow m_N = 1$, *így* $p_{N-} = N - m_N = p_1$, $p_{N+} = N + m_N = p_2$,

tehát $N = \dfrac{p_{N-} + p_{N+}}{2}$

Q.E.D.

Dénes-féle Ikerprím sejtés

A Dénes-féle Szimmetrikus prímszám tétel végtelen sok olyan *N*-re teljesül, ahol $m_N = 1$. Ez az állítás ekvivalens azzal, hogy végtelen sok ikerprím létezik.

----- . -----

Hivatkozások

[Dénes 2001] Dénes, Tamás: *Complementary prime-sieve*
PUre Mathematics and Applications, Vol.12 (2001), No. 2, pp. 197-207
http://www.titoktan.hu/_raktar/_e_vilagi_gondolatok/PUMA-CPS.pdf
http://www.titoktan.hu/_raktar/_e_vilagi_gondolatok/KomplementerPrimszita.pdf