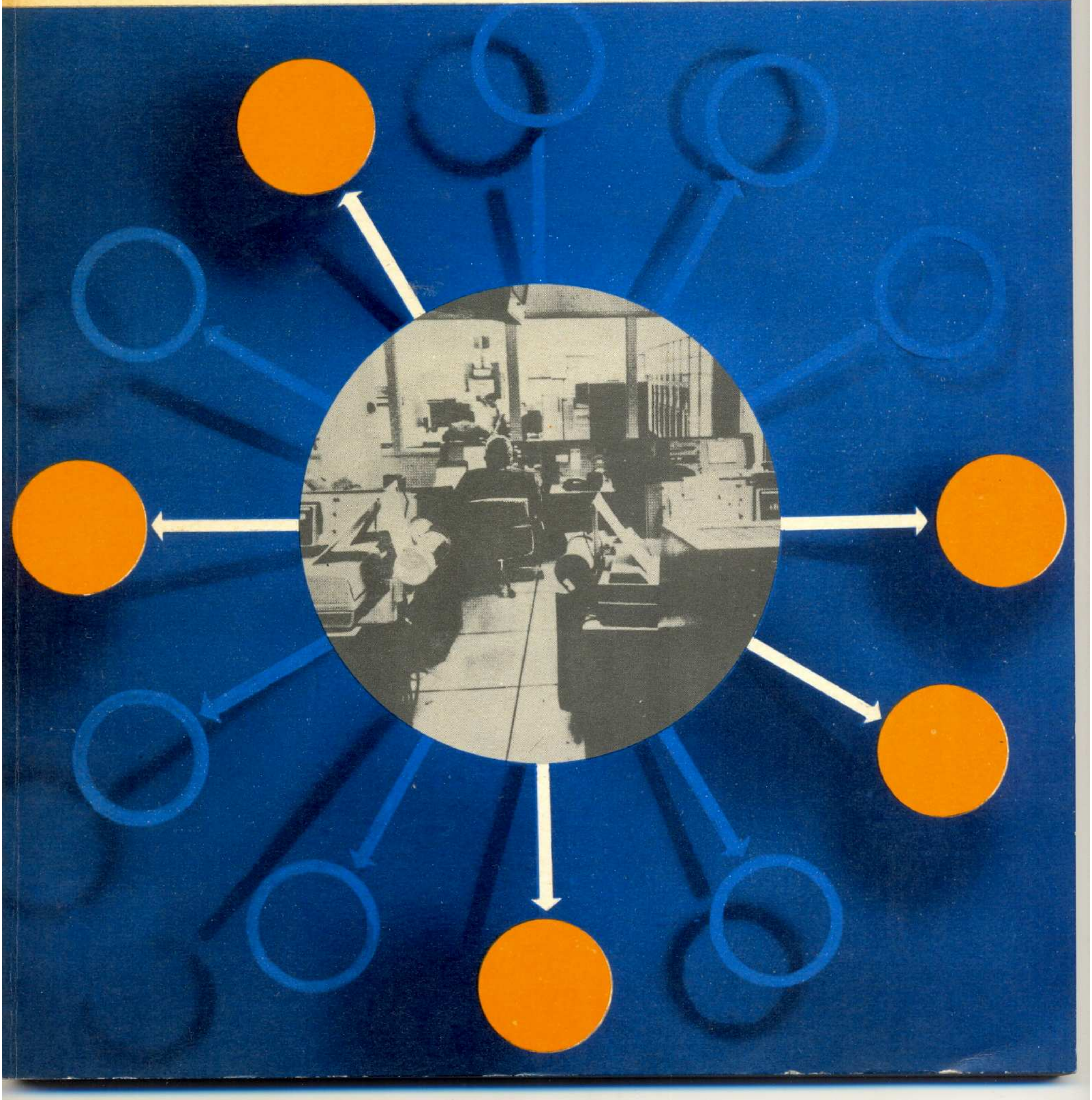
INFORMÁCIÓ ELEKTRONIKA

1975/2



Algoritmusok az összes n-edfokú permutáció előállítására

II. rész

Dénes Tamás

Az összes n-edfokú permutáció előállítására, valamint $n!$ darab természetes szám és az összes n-edfokú permutáció közötti egy-egyértelmű megfeleltetésre a cikkünk I. részében bemutatott eljáráson kívül egy másikat is nyerhetünk, az alábbiakban ismertetett módon. Ez az eljárás is csak elemi transzpozíciókat használ az előállításhoz, mint az I. részben ismertetett, azonban itt az $n!-1$ lépés mindegyikében egyetlen elemi transzpozíció kerül végrehajtásra.

Fogalmak, jelölések

Tekintsük a továbbiakban a permutációkat, mint elemek valamely rögzített sorrendben való felírását. Így például az 1, 2, 3, 4 elemek egy permutációja $\Pi = 1432$ alakban írható. A permutáció fokszáma a benne szereplő elemek számát jelöli.

Vezessük be a következő fogalmat, melyet k-adfokú permutációmátrixnak fogunk nevezni.

DEFINÍCIÓ:

Egy M_k mátrixot k-adfokú permutációmátrixnak nevezünk, ha M_k $k!$ sorból és k oszlopból áll, és sorai az összes k-adfokú permutációt tartalmazzák.

A definícióból következik, hogy az M_k mátrix minden k-adfokú permutációt csak egyszer tartalmaz, valamint M_k nem egyértelmű, vagyis adott k-hoz több M_k mátrix is tartozik.

Egy M_3 harmadfokú permutációmátrix például a következő:

$$M_3 = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 1 & 3 \\ 2 & 3 & 1 \\ 3 & 2 & 1 \\ 3 & 1 & 2 \\ 1 & 3 & 2 \end{bmatrix}$$

Jelöljük az M_k permutációmátrix $1, 2, \ldots, k$-adik oszlopában álló $k!$ elemű számhalmazt a mátrixban szereplő sorrendben rendre $a_1, a_2, \ldots, a_k$-val. Ekkor M_k előáll a következő alakban:

$$(K1) \qquad M_k = [a_1 a_2 \ldots a_k]$$

Ezután képezzük az M_k' mátrixot úgy, hogy M_k-hoz $(k+1)$-edik oszlopként hozzávesszük a $k!$ darab $(k+1)$ elemből álló oszlopot, melyet a_{k+1}-gyel jelölünk.

$$(K2) \qquad M_k' = [a_1 a_2 \ldots a_k a_{k+1}]$$

Példaként nézzük meg az M_3 permutációmátrix ilyen felírását és az M_3' mátrixot:

$$M_3 \text{ esetén } a_1 = \begin{Bmatrix} 1 \\ 2 \\ 2 \\ 3 \\ 3 \\ 1 \end{Bmatrix} \; a_2 = \begin{Bmatrix} 2 \\ 1 \\ 3 \\ 2 \\ 1 \\ 3 \end{Bmatrix} \; a_3 = \begin{Bmatrix} 3 \\ 3 \\ 1 \\ 1 \\ 2 \\ 2 \end{Bmatrix} \; a_4 = \begin{Bmatrix} 4 \\ 4 \\ 4 \\ 4 \\ 4 \\ 4 \end{Bmatrix}$$

Tehát

$$M_3' = [a_1 a_2 a_3 a_4] = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 2 & 1 & 3 & 4 \\ 2 & 3 & 1 & 4 \\ 3 & 2 & 1 & 4 \\ 3 & 1 & 2 & 4 \\ 1 & 3 & 2 & 4 \end{bmatrix}$$

Rekurziós eljárás

Állítás: legyen

$$(K_3) \qquad M_{k+1} = \underbrace{\begin{bmatrix} a_1 a_2 \ldots a_{k-1} a_k a_{k+1} \\ a_1 a_2 \ldots a_{k-1} a_{k+1} a_k \\ a_1 a_2 \ldots a_{k+1} a_{k-1} a_k \\ \cdot\ \cdot \quad \cdot\ \cdot\ \cdot \\ \cdot\ \cdot \quad \cdot\ \cdot\ \cdot \\ \cdot\ \cdot \quad \cdot\ \cdot\ \cdot \\ a_{k+1} a_1 \ldots a_{k-2} a_{k-1} a_k \end{bmatrix}}_{(k+1) \text{ oszlop}} \left.\vphantom{\begin{bmatrix} a \\ a \\ a \\ a \\ a \\ a \\ a \end{bmatrix}}\right\} (k+1) \text{ sor},$$

akkor a fenti M_{k+1} mátrix $(k+1)$-edfokú permutációmátrix.

Bizonyítás:

Elég azt belátni, hogy M_{k+1} összes sora különböző, mert ebből és a permutációmátrix definíciójából az állítás következik. M_{k+1} soraiban az $a_1, a_2, \ldots, a_{k+1}$ elemek egy-egy $(k+1)$-edfokú permutációja áll, ezek közül bármely kettő csak akkor lehet azonos, ha az összes pozíciójukon azonos elem áll. Két ilyen sora azonban nem lehet M_{k+1}-nek, mert az a_{k+1} elem mindegyik sorban más helyen szerepel, hiszen M_{k+1} mellékátlójában helyezkedik el az összes a_{k+1} elem. Ezzel az állítást beláttuk.

Megjegyzések:

$\boxed{\text{M1}}$

A (K3)-ban szereplő mátrix sorait, mint az $a_1, a_2, \ldots, a_{k+1}$ elemek permutációit tekintve, észrevehető, hogy az egymás alatti sorok csak egy elemi transzpozícióban térnek el.

$\boxed{\text{M2}}$

A (K3)-beli mátrixban az a_{k+1} elemek oszlopsorszáma és a megfelelő sor sorszáma között egy-egyértelmű megfeleltetés létesíthető. Ugyanis, ha egy adott a_{k+1} elem az s-edik sor és az i-edik oszlop metszésében szerepel, akkor fennáll a következő összefüggés:

(K4) $\quad s + i = k + 2$

Igy az összes n-edfokú permutáció előállítására nyertünk egy rekurziós eljárást, melyet az alábbi összefüggések írnak le:

(K5) $M_1 = [1]$

(K6) $M_{n-1} = [a_1 a_2 \ldots a_{n-1}]$, ahol $a_1, a_2, \ldots, a_{n-1}$ a(K1) szerint értelmezett.

(K7) $M'_{n-1} = [a_1 a_2 \ldots a_{n-1} a_n]$, ahol a_n az $(n-1)!$ darab n-esből álló oszlop.

(K8) $$M_n = \begin{matrix} a_1 a_2 \ldots a_{n-2} a_{n-1} a_n \\ a_1 a_2 \ldots a_{n-2} a_n a_{n-1} \\ \cdot\ \cdot \quad \cdot\ \cdot\ \cdot \\ \cdot\ \cdot \quad \cdot\ \cdot\ \cdot \\ \cdot\ \cdot \quad \cdot\ \cdot\ \cdot \\ a_n a_1 \ldots a_{n-3} a_{n-2} a_{n-1} \end{matrix}$$

Példaként nézzük meg az összes negyedfokú permutáció előállítását a fenti eljárással.

$$M_1 = [1] \qquad M'_1 = [12]$$

$$M_2 = \begin{bmatrix} 12 \\ 21 \end{bmatrix} \text{ itt } a_1 = \begin{Bmatrix} 1 \\ 2 \end{Bmatrix} \quad a_3 = \begin{Bmatrix} 3 \\ 3 \end{Bmatrix} \quad a_2 = \begin{Bmatrix} 2 \\ 1 \end{Bmatrix}$$

$$M'_2 = [a_1 a_2 a_3] = \begin{bmatrix} 1\,2\,3 \\ 2\,1\,3 \end{bmatrix}$$

$$M_3 = \begin{bmatrix} a_1 a_2 a_3 \\ a_1 a_3 a_2 \\ a_3 a_1 a_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1\,2\,3 \\ 2\,1\,3 \\ 1\,3\,2 \\ 2\,3\,1 \\ 3\,1\,2 \\ 3\,2\,1 \end{bmatrix}$$

$$\text{itt } b_1 = \begin{Bmatrix} 1 \\ 2 \\ 1 \\ 2 \\ 3 \\ 3 \end{Bmatrix} \quad b_2 = \begin{Bmatrix} 2 \\ 1 \\ 3 \\ 3 \\ 1 \\ 2 \end{Bmatrix} \quad b_3 = \begin{Bmatrix} 3 \\ 3 \\ 2 \\ 1 \\ 2 \\ 1 \end{Bmatrix} \quad b_4 = \begin{Bmatrix} 4 \\ 4 \\ 4 \\ 4 \\ 4 \\ 4 \end{Bmatrix}$$

$$M'_3 = [b_1 b_2 b_3 b_4] = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 2 & 1 & 3 & 4 \\ 1 & 3 & 2 & 4 \\ 2 & 3 & 1 & 4 \\ 3 & 1 & 2 & 4 \\ 3 & 2 & 1 & 4 \end{bmatrix}$$

$$M_4 = \begin{bmatrix} b_1 b_2 b_3 b_4 \\ b_1 b_2 b_4 b_3 \\ b_1 b_4 b_2 b_3 \\ b_4 b_1 b_2 b_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 2 & 1 & 3 & 4 \\ 1 & 3 & 2 & 4 \\ 2 & 3 & 1 & 4 \\ 3 & 1 & 2 & 4 \\ 3 & 2 & 1 & 4 \\ 1 & 2 & 4 & 3 \\ 2 & 1 & 4 & 3 \\ 1 & 3 & 4 & 2 \\ 2 & 3 & 4 & 1 \\ 3 & 1 & 4 & 2 \\ 3 & 2 & 4 & 1 \\ 1 & 4 & 2 & 3 \\ 2 & 4 & 1 & 3 \\ 1 & 4 & 3 & 2 \\ 2 & 4 & 3 & 1 \\ 3 & 4 & 1 & 2 \\ 3 & 4 & 2 & 1 \\ 4 & 1 & 2 & 3 \\ 4 & 2 & 1 & 3 \\ 4 & 1 & 3 & 2 \\ 4 & 2 & 3 & 1 \\ 4 & 3 & 1 & 2 \\ 4 & 3 & 2 & 1 \end{bmatrix}$$

Az M_4 mátrix egy negyedfokú permutációmátrix, melyben tehát szerepel az összes negyedfokú permutáció (soronként egy). Az eljárást ebben az esetben is jól szemlélteti az előző részben alkalmazott blokkos ábra, melyen az eljárás szerkezete jól megfigyelhető (lásd *1. ábra*).

A fenti (K5), (K6), (K7), (K8)-ban leírt eljárás igen egyszerűen kivitelezhető számítógépen, mivel minden rekurziós lépésben csak az n (mint elem) egy elemi transzpozíciójának végrehajtását kívánja meg. Igy $n!-1$ rekurziós lépésben előáll az összes n-edfokú permutáció. Mivel ennél kevesebb lépésben az összes n-edfokú permutációt nem lehet előállítani, ez az eljárás igen gyorsnak mondható.

Egy-egyértelmű megfeleltetés az összes n-edfokú permutáció és az első n! természetes szám között

Az $\boxed{\text{M2}}$ megjegyzésben leírt (K4) összefüggés segítségével rendkívül egyszerűen történhet a fenti megfeleltetés. Minden n-edfokú permutációhoz egy $1 \leqslant m \leqslant n\,!$ természetes számot rendelünk.

(A megfelelő jelöléseket átvesszük az I. részből.) Az m szám előállítása az $m - 1 = \sum_{i=2}^{n} b_i[(i-1)!]$ alakban történik. (Lásd I. rész (22) összefüggés.) A megfeleltetéshez az $n-1$ elemű b_i sorozat meghatározása szükséges.

Az $\boxed{\text{M2}}$ megjegyzésből következik, hogy egy n-edfokú permutáció minden egyes elemének i oszlopsorszámához

egyértelműen tartozik egy (K4) szerint meghatározható s természetes szám.
Rendeljük egy adott n-edfokú permutációhoz azt a b_i sorozatot, amely úgy áll elő, hogy

(K9) $b_i = s - 1$

ahol az s számot mindig az aktuális M_k permutációmátrixból olvassuk le.
Ezzel elértük, hogy egy n -edfokú permutációhoz csupán elemei oszlopsorszámának meghatározásával hozzárendelhetünk egyértelműen egy m természetes számot, mely rendelkezik a fenti tulajdonsággal.
Példaként a $\Pi = 2431$ permutációhoz rendeljük hozzá a megfelelő m számot a fenti eljárással.
(Az eredményt az 1. ábrán ellenőrizhetjük.)

1. lépés: (b_4 meghatározása)

$\pi = \;\; 2\,4\,3\,1$

$\downarrow$

oszlopsorszám: $i = 2$, $k+2 = 5$ $\Rightarrow$ $s = 5 - 2 = 3 \Rightarrow b_4 = 2$

2. lépés: (b_3 meghatározása)

$\pi' = \;\; 2\,3\,1$

$\downarrow$

oszlopsorszám: $i = 2$, $k+2 = 4$ $\Rightarrow$ $s = 4 - 2 = 2 \Rightarrow b_3 = 1$

3. lépés: (b_2 meghatározása)

$\pi'' = 2\,1$

$\downarrow$

oszlopsorszám: $i = 1$, $k+2 = 3$ $\Rightarrow$ $s = 3 - 1 = 2 \Rightarrow b_2 = 1$

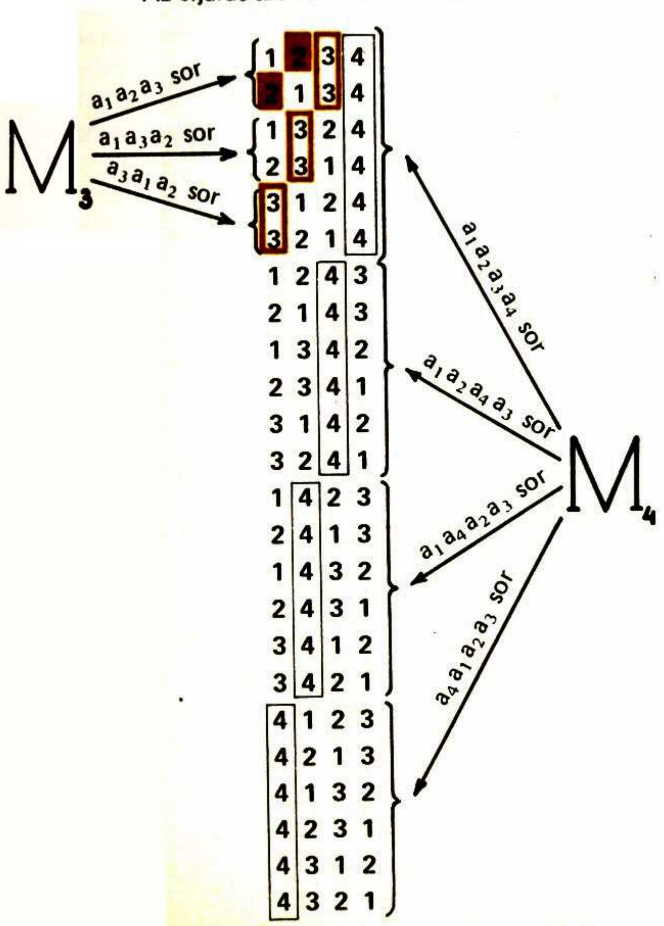
4. lépés: (szummázás)

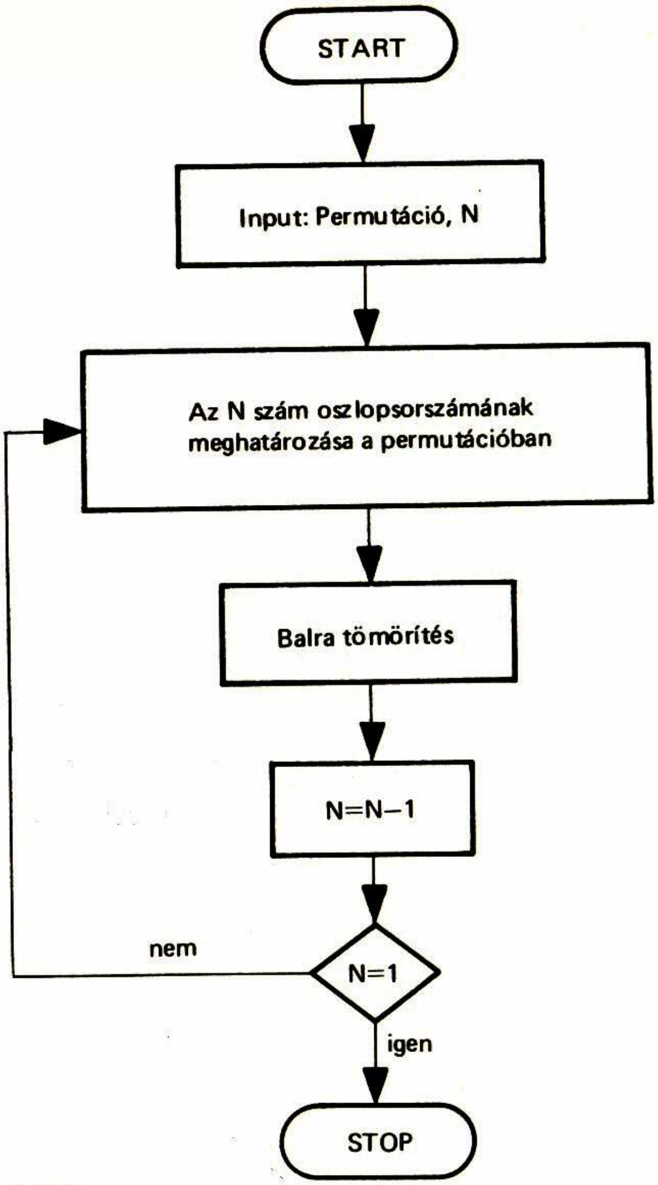
$m - 1 = b_4 \cdot 3! + b_1 \cdot 2! + b_2 \cdot 1! =$
$= 2 \cdot 3! + 1 \cdot 2 + 1 \cdot 1! = 15.$

Tehát Π permutációhoz rendelt $m = 16$.

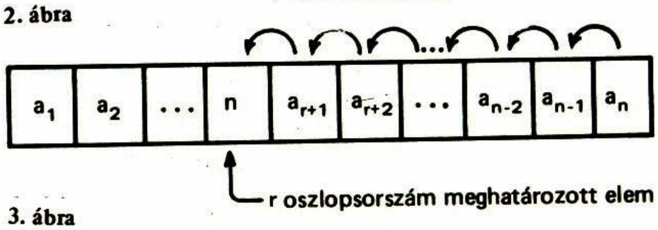
1. ábra

Az eljárás szerkezete n=4 esetén





2. ábra



3. ábra

Adott m természetes számhoz a fenti eljárás fordított végrehajtásával egyértelműen rendelhetünk egy permutációt, hiszen az I. rész B 1 pontjában bizonyítást nyert, hogy a (22) felbontás egy-egyértelmű, ebből pedig az M 2 megjegyzésben ismertetett egy-egyértelmű megfeleltetés miatt egyértelműen meghatározható az egyes elemek helye a permutációban.
A fenti megfeleltetés számítógépes kivitelezése igen egyszerű, hiszen n rekeszben ábrázolunk egy n-edfokú permutációt, és a rekeszek sorszáma jelenti a bennük elhelyezett elem oszlopsorszámát. Ekkor a megfeleltetés egy $(n-1)$-szer lefutó ciklusban megoldható, ahol minden lefutás két lépést tartalmaz (lásd *2. ábra*).
Az első lépés, az oszlopsorszám-meghatározás, egyetlen logikai döntés maximum $(n-1)$-szeri megismétléséből áll. A második lépés, a tömörítés, a meghatározott elemtől jobbra levő elemek egy hellyel balra tolását jelenti (*3. ábra*). *(Tudományos, műszaki alkalmazások rovat)*