

A komplementer prímszita alkalmazása az ikerprímek számának becslésére

Dénes Tamás matematikus

e-mail: tdenest@titoktan.hu

Abstract. [1]-ben bevezettük a „komplementer prímszita”-t (rövidítése: C.P.S.), amely szükséges és elegendő feltételt ad a 3-nál nagyobb, $6k-1$ és $6k+1$ alakú összetett számok előállítására. Jelen dolgozatban a C.P.S. alkalmazásával adunk bizonyítást S.W.Golomb ikerprímek számára vonatkozó [3]-beli tételére, majd szintén a C.P.S.-re alapozva levezetünk egy közelítő formulát az ikerprímek $T(N)$ számára, az $1-N$ intervallumban.

1. Szükséges és elegendő feltétel az "ikerprím tétel"-hez

1. Tétel

$3 < p < q$ ikerprím pár akkor és csak akkor, ha $p=6k-1$ és $q=6k+1$ alakú prímek ($k=1,2,3,\dots$).

Bizonyítás:

Az [1]-beli 1. tétel alapján („minden 3-nál nagyobb prímszám $6k+1$ vagy $6k-1$ alakú”) csak két eset lehetséges.

$$(1) \quad p=6k-1 \Rightarrow q=p+2=6k+1$$

$$(2) \quad p=6k+1 \Rightarrow q=p+2=6k+3=3(2k+1) \quad \text{ez viszont nem prím.}$$

Tehát csak az (1) eset lehetséges. A másik irányba a bizonyítás triviális.

Q.E.D.

Következmény: Ha p, q ikerprím pár, akkor

$$(3) \quad pq = (6k-1)(6k+1) = 36k^2 - 1$$

Ebből adódik az alábbi 2.tétel:

2. Tétel

$(36k^2-1)$ -nek akkor és csak akkor van pontosan két prímtényezője, ha $6k-1$ és $6k+1$ ikerprímek.

Bizonyítás:

Ha $(36k^2-1)$ -nek pontosan két prímtényezője van, (3) szerint ezek csak a $6k-1$ és $6k+1$ számok lehetnek. Tehát ezek ikerprímek.

Ha $6k-1$ és $6k+1$ ikerprímek, akkor szintén (3) szerint $(36k^2-1)$ -nek nem lehet több prímtényezője.

Q.E.D.

A 2. tétel alapján az ikerprímek számára vonatkozó alábbi tétel fogalmazható meg:

Akkor és csak akkor van véges számú ikerprím, ha létezik K természetes szám, amelyre teljesül, hogy minden $k > K$ esetén $(36k^2 - 1)$ -nek legalább három prímtenyezője van. Ez pontosan akkor teljesül, ha $6k-1$ és $6k+1$ közül legalább az egyik összetett szám. Ami viszont az [1]-beli 2. tétel („komplementer prímshita”) alapján, akkor és csak akkor lehetséges, ha k az alábbi alakok valamelyikében írható:

$$(4) \quad k = 6uv + u + v, \text{ vagy } k = 6uv - u - v, \text{ vagy } k = 6uv - u + v \text{ vagy } k = 6uv + u - v$$

Ezzel bizonyítást nyert alábbi tételünk:

3. Tétel

Akkor és csak akkor van véges számú ikerprím, ha létezik K természetes szám, hogy minden $k > K$ esetén teljesül, hogy k a (4) alakok valamelyikeként írható. Ez tehát azt jelenti, hogy véges számútól eltekintve minden k ilyen.

Így a 3. tétellel ekvivalens S.W.Golomb által [3]-ban feladatként közölt alábbi tételét is bebizonyítottuk:

„Akkor és csak akkor van végtelen sok ikerprím, ha van végtelen sok olyan egész szám, amely nem állítható elő a (4) alakok egyikében sem.”

2. Az ikerprímek számának becslése az $(1-N)$ intervallumban

Rendezzük az 1. tábla szerint a $6k-1$ és $6k+1$ alakú számokat, ahol k végigfut a természetes számokon. Könnyen belátható, hogy az 1. tábla tartalmazza a második oszlopban az összes $6k-1$ alakú, míg a harmadik oszlopban az összes $6k+1$ alakú természetes számokat, így az összes prímszámokat is¹. A fenti 1. tétel szerint tehát az összes iker prímek az 1. tábla azon soraiban vannak, amelyekben a 2. és 3. oszlopban is prímszám van. A 3. tétel állítása tehát azt jelenti, hogy az 1. táblában a K -adik sor utáni sorokban legfeljebb az egyik szám lehet prím, azaz minden $k > K$ sorindex a (4) alakok valamelyikében írható.

Most megmutatjuk, hogy az 1. táblában vannak sorok, amelyekben biztosan nincs ikerprím. Ehhez megvizsgáljuk a $k=5r$, $k=5r+1$, $k=5r+2$, $k=5r+3$, $k=5r+4$ eseteket ($r=0,1,2,3,\dots$), amely esetek nyilvánvalóan előállítják az összes k sorindexet.

¹ Az állítás következik abból a tételből, hogy "Minden prímszám $6k-1$, vagy $6k+1$ alakú." (lásd [1])

1. Tábla

k	$6k-1$	$6k+1$		u	v
1	5	7	Iker prím		
2	11	13	Iker prím		
3	17	19	Iker prím		
4	23	25	$(6x1-1)(6x1-1)=5x5=25$	1	1
5	29	31	Iker prím		
6	35	37	$(6x1-1)(6x1+1)=5x7=35$	1	1
7	41	43	Iker prím		
8	47	49	$(6x1+1)(6x1+1)=7x7=49$	1	1
9	53	55	$(6x1-1)(6x2-1)=5x11=55$	1	2
10	59	61	Iker prím		
11	65	67	$(6x1-1)(6x2+1)=5x13=65$	1	2
12	71	73	Iker prím		
13	77	79	$(6x1+1)(6x2-1)=7x11=77$	1	2
14	83	85	$(6x1-1)(6x3-1)=5x17=85$	1	3
15	89	91	$(6x1+1)(6x2+1)=7x13=91$	1	2
16	95	97	$(6x1-1)(6x3+1)=5x19=95$	1	3
17	101	103	Iker prím		
18	107	109	Iker prím		
19	113	115	$(6x1-1)(6x4-1)=5x23=115$	1	4
20	119	121	$(6x2-1)(6x2-1)=11x11=121$	2	2
21	125	127	$(6x1-1)(6x4+1)=5x25=125$	1	4
22	131	133	$(6x1+1)(6x3+1)=7x19=133$	1	3
23	137	139	Iker prím		
24	143	145	$(6x1-1)(6x5-1)=5x29=145$	1	5
25	149	151	Iker prím		
26	155	157	$(6x1-1)(6x5+1)=5x31=155$	1	5
27	161	163	$(6x1+1)(6x4-1)=7x23=161$	1	4
28	167	169	$(6x2+1)(6x2+1)=13x13=169$	2	2
29	173	175	$(6x1+1)(6x4+1)=7x25=175$	1	4
30	179	181	Iker prím		
...	...	...			
K	$6K-1$	$6K+1$			
...	...	...			

-Ha $k=5r$ ($r=1,2,3,\dots$), akkor $6k-1=30r-1$ és $6k+1=30r+1$

Ez a két sorozat tartalmazza az 1.tábla minden ötödik sorát, ahol például a következőkben ikerprím van (lásd 1. tábla): $r=1,2,5,6,\dots$, azaz $k=5, 10, 25, 30, \dots$

-Ha $k=5r+1$ ($r=1,2,3,\dots$), akkor $6k-1=30r+5=5(6r+1)$ ami nem prím, így ezek a sorok biztosan nem tartalmazznak ikerprímet (lásd pl. az 1. tábla $k=6, 11, 16, 21, \dots$ sorait)

-Ha $k=5r+2$ ($r=0,1,2,3,\dots$), akkor $6k-1=30r+11$ és $6k+1=30r+13$

Ez a két sorozat szintén végigfut az 1. táblázat másodiktól kezdődő minden ötödik során, ahol például a következőkben ikerprím van (lásd pl. az 1. tábla $k=2, 7, 12, 17, 32, \dots$ sorait)

-Ha $k=5r+3$ ($r=0,1,2,3,\dots$), akkor $6k-1=30r+17$ és $6k+1=30r+19$

Ez a két sorozat szintén végigfut az 1. táblázat harmadiktól kezdődő minden ötödik során, ahol például a következőkben ikerprím van (lásd pl. az 1. tábla $k=3, 18, 23, 33, \dots$ sorait)

-Ha $k=5r+4$ ($r=0,1,2,3,\dots$), akkor $6k-1=30r+23$ és $6k+1=30r+25=5(6r+5)$, ami nem prím, így ezekben a sorokban biztosan nincs ikerprím.

A fentiek alapján tehát az 1. tábla $k=5r+1$, illetve $k=5r+4$ soraiban ($k=4,6,9,11,14,16,\dots$) biztosan nincs ikerprím, tehát

(5) az összes ikerprímet a $k=5r$, $k=5r+2$, $k=5r+3$ ($k=0,1,2,3,\dots$) sorok tartalmazzák.

Innen adódik az N -nél kisebb ikerprímek számára (jele: $T(N)$) egy felső korlát:

Az 1. tábla sorainak k_n száma N -ig ugyanis $6k_n + 1 \leq N \Rightarrow k_n = \left\lfloor \frac{N-1}{6} \right\rfloor \approx \left\lfloor \frac{N}{6} \right\rfloor$

Az előző levezetés szerint ezeknek a soroknak legfeljebb a $\frac{3}{5}$ -öd részében lehet ikerprím, így kapjuk, hogy

$$(6) \quad T(N) \leq \left\lfloor \frac{N}{6} \right\rfloor \cdot \frac{3}{5} = \left\lfloor \frac{N}{10} \right\rfloor$$

Vizsgáljuk rendre az (5) alakú sorokat a „komplementer prímszita tétel” fényében. Azaz az (5) sorokban biztosan nincs ikerprím, ha a k sorindex a (4) alakok valamelyikeként írható. Mivel a (4) összefüggések u, v -re szimmetrikusak, így az általánosság csorbítása nélkül vizsgálhatjuk az $u=constans$ esetet.

(7) $u=1$ és $k=5r=6uv+u+v \Rightarrow k=7v+1$ mindig teljesül, ha $v=5a+2$, azaz $k=35a+15$

(8) $u=1$ és $k=5r=6uv-u-v \Rightarrow k=5v-1$ azaz $5r=5v-1$, ami *sosem teljesül*

(9) $u=1$ és $k=5r=6uv+u-v \Rightarrow k=5v+1$ azaz $5r=5v+1$, ami *sosem teljesül*

(10) $u=1$ és $k=5r=6uv-u+v \Rightarrow k=7v-1$ mindig teljesül, ha $v=5a+3$, azaz $k=35a+20$

(11) $u=1$ és $k=5r+2=6uv+u+v \Rightarrow k=7v+1$ mindig teljesül, ha $v=5a+3$, azaz $k=35a+22$

(12) $u=1$ és $k=5r+2=6uv-u-v \Rightarrow k=5v-1$ azaz $5r=5v-3$, ami *sosem teljesül*

(13) $u=1$ és $k=5r+2=6uv+u-v \Rightarrow k=5v+1$ azaz $5r=5v-1$, ami *sosem teljesül*

(14) $u=1$ és $k=5r+2=6uv-u+v \Rightarrow k=7v-1$ mindig teljesül, ha $v=5a+4$, azaz $k=35a+27$

(15) $u=1$ és $k=5r+3=6uv+u+v \Rightarrow k=7v+1$ mindig teljesül, ha $v=5a+1$, azaz $k=35a+8$

(16) $u=1$ és $k=5r+3=6uv-u-v \Rightarrow k=5v-1$ azaz $5r=5v-4$, ami *sosem teljesül*

(17) $u=1$ és $k=5r+3=6uv+u-v \Rightarrow k=5v+1$ azaz $5r=5v-2$, ami *sosem teljesül*

(18) $u=1$ és $k=5r+3=6uv-u+v \Rightarrow k=7v-1$ mindig teljesül, ha $v=5a+2$, azaz $k=35a+13$

A (7), (10), (11), (14), (15), (18) levezetésekéből következik, hogy az ikerprímeket tartalmazó (5) sorok $\frac{6}{35}$ -öd részében biztos nincs ikerprím, így a (6) formulát pontosíthatjuk:

$$(19) \quad T(N) \leq \left\lfloor \frac{N}{10} \right\rfloor \left(1 - \frac{6}{35} \right) = \frac{29}{35} \left\lfloor \frac{N}{10} \right\rfloor$$

Az $u=2$ eset már elvezet az általános formulához.

$$(20) \quad u=2 \text{ és } k=5r=6uv+u+v \Rightarrow k=13v+2 \text{ mindig teljesül, ha } v=5a+1, \text{ azaz } k=65a+15$$

$$(21) \quad u=2 \text{ és } k=5r=6uv-u-v \Rightarrow k=11v-2 \text{ mindig teljesül, ha } v=5a+2, \text{ azaz } k=55a+20$$

$$(22) \quad u=2 \text{ és } k=5r=6uv+u-v \Rightarrow k=11v+2 \text{ mindig teljesül, ha } v=5a+3, \text{ azaz } k=55a+35$$

$$(23) \quad u=2 \text{ és } k=5r=6uv-u+v \Rightarrow k=13v-2 \text{ mindig teljesül, ha } v=5a+4, \text{ azaz } k=65a+50$$

$$(24) \quad u=2 \text{ és } k=5r+2=6uv+u+v \Rightarrow k=13v+2 \text{ mindig teljesül, ha } v=5a, \text{ azaz } k=65a+2$$

$$(25) \quad u=2 \text{ és } k=5r+2=6uv-u-v \Rightarrow k=11v-2 \text{ mindig teljesül, ha } v=5a+4, \text{ azaz } k=55a+42$$

$$(26) \quad u=2 \text{ és } k=5r+2=6uv+u-v \Rightarrow k=11v+2 \text{ mindig teljesül, ha } v=5a, \text{ azaz } k=55a+2$$

$$(27) \quad u=2 \text{ és } k=5r+2=6uv-u+v \Rightarrow k=13v-2 \text{ mindig teljesül, ha } v=5a+3, \text{ azaz } k=65a+37$$

$$(28) \quad u=2 \text{ és } k=5r+3=6uv+u+v \Rightarrow k=13v+2 \text{ mindig teljesül, ha } v=5a+2, \text{ azaz } k=65a+28$$

$$(29) \quad u=2 \text{ és } k=5r+3=6uv-u-v \Rightarrow k=11v-2 \text{ mindig teljesül, ha } v=5a, \text{ azaz } k=55a-2$$

$$(30) \quad u=2 \text{ és } k=5r+3=6uv+u-v \Rightarrow k=11v+2 \text{ mindig teljesül, ha } v=5a+1, \text{ azaz } k=55a+13$$

$$(31) \quad u=2 \text{ és } k=5r+3=6uv-u+v \Rightarrow k=13v-2 \text{ mindig teljesül, ha } v=5a, \text{ azaz } k=65a-2$$

A (20)-(31) összefüggések azt mutatják, hogy bizonyos sortól kezdődően (ezek a kezdősorok mind különbözők) minden 55-ik és 65-ik sorban biztosan nincs ikerprím.

Azaz a (19) szerint még potenciálisan ikerprímeket tartalmazó sorok $\frac{6}{55} + \frac{6}{65}$ -öd része kiesik. Belátható, hogy általánosságban igaz bármely u -ra, hogy a potenciálisan ikerprímeket tartalmazó sorok s_u -ad részében nincs ikerprím, ahol

$$(32) \quad s_u = \frac{6}{5} \left(\frac{1}{6u+1} + \frac{1}{6u-1} \right)$$

A „komplementer prímszita” módszernél megmutattuk, hogy ha N -ig akarjuk előállítani a

prímszámokat, akkor az u értéket 1-től $\left\lfloor \frac{\sqrt{N}}{6} \right\rfloor$ -ig kell végigfuttatni. Tehát (32)-ből kapjuk, hogy 1-től N -ig azoknak a soroknak a száma, amelyben nincs ikerprím:

$$(33) \quad \frac{6}{35} + \sum_{u=2}^{\left\lfloor \frac{\sqrt{N}}{6} \right\rfloor} s_u = \frac{6}{5} \cdot \left(\frac{1}{7} + \sum_{u=2}^{\left\lfloor \frac{\sqrt{N}}{6} \right\rfloor} \frac{1}{6u+1} + \frac{1}{6u-1} \right)$$

A „komplementer prímshita” módszernél kifejtettek miatt azonban, az összes u, v párok $m(N)$ multiplicitással² állítják elő a k értékeket $K(N)$ lépésben, így az ikerprímeket nem tartalmazó sorok aránya (jele: $S(N)$) az alábbi összefüggés szerint alakul:

$$(34) \quad S(N) \approx \left(1 - \frac{m(N)}{K(N)}\right) \left(\frac{6}{35} + \sum_{u=2}^{\left[\frac{\sqrt{N}}{6}\right]} s_u\right)$$

Ebből és (19)-ből $T(N)$ -re az alábbi becslés adódik :

$$(35) \quad T(N) \leq \left[\frac{N}{10}\right] (1 - S(N)) \approx \left[\frac{N}{10}\right] \left(1 - \left(1 - \frac{m(N)}{K(N)}\right) \frac{6}{5} \left(\frac{1}{7} + \sum_{u=2}^{\left[\frac{\sqrt{N}}{6}\right]} \left(\frac{1}{6u+1} + \frac{1}{6u-1}\right)\right)\right)$$

A (35) becslést alig torzítja, ha a (36) közelítést használjuk:

$$(36) \quad \sum_{u=2}^{\left[\frac{\sqrt{N}}{6}\right]} \left(\frac{1}{6u+1} + \frac{1}{6u-1}\right) = \sum_{u=2}^{\left[\frac{\sqrt{N}}{6}\right]} \frac{12u}{36u^2 - 1} \approx \sum_{u=2}^{\left[\frac{\sqrt{N}}{6}\right]} \frac{12}{36u} = \frac{1}{3} \cdot \sum_{u=2}^{\left[\frac{\sqrt{N}}{6}\right]} \frac{1}{u}$$

Felhasználjuk az alábbi közelítést (lásd [2] 2.old.):

$$(37) \quad 1 + \log n \geq \sum_{u=1}^n \frac{1}{u} > \log(n+1)$$

A továbbiakban a két oldal középértékét használjuk $\sum_{u=1}^n \frac{1}{u}$ közelítő értékeként:

$$(38) \quad \sum_{u=1}^n \frac{1}{u} \approx \frac{1 + \log n + \log(n+1)}{2} = \frac{1 + \log n(n+1)}{2}$$

A (38) összefüggést alkalmazva (36)-ra:

$$(39) \quad \frac{1}{3} \cdot \sum_{u=2}^{\left[\frac{\sqrt{N}}{6}\right]} \frac{1}{u} \approx \left(\frac{1 + \log \left(\frac{\sqrt{N}}{6} \left(\frac{\sqrt{N}}{6} + 1 \right) \right)}{2} - 1 \right) = \frac{\log \left(\frac{N + 6\sqrt{N}}{36} \right) - 1}{6}$$

² Az $m(N)$ multiplicitási szám direkt képlettel történő meghatározása jelenleg **nyitott probléma**.

A (39) közelítő értéket (35)-be helyettesítve kapjuk:

$$(40) \quad T(N) \approx \left\lfloor \frac{N}{10} \right\rfloor \left[1 - \left(1 - \frac{m(N)}{K(N)} \right) \frac{6}{5} \left(\frac{1}{7} + \frac{\log \left(\frac{N + 6\sqrt{N}}{36} \right) - 1}{6} \right) \right] =$$

$$= \left\lfloor \frac{N}{10} \right\rfloor \left[1 - \left(1 - \frac{m(N)}{K(N)} \right) \left(\frac{\log(N + 6\sqrt{N})}{5} - \underbrace{\frac{1 + 7 \cdot \log 36}{35}}_{0.7452752} \right) \right]$$

$$(41) \quad \log(N + 6\sqrt{N}) = \log \sqrt{N} (\sqrt{N} + 6) = \frac{\log N}{2} + \log(\sqrt{N} + 6) \xrightarrow{N \rightarrow \infty} \log N$$

A (41) összefüggést (40)-be behelyettesítve:

$$(42) \quad T(N) \approx \left\lfloor \frac{N}{10} \right\rfloor \cdot \left(1 - \left(1 - \frac{m(N)}{K(N)} \right) \left(\frac{\log N}{5} - 0.7452752 \right) \right) =$$

$$= \left\lfloor \frac{N}{10} \right\rfloor \cdot \left(1.7452752 - \frac{\log N}{5} + \frac{m(N)}{K(N)} \left(\frac{\log N}{5} - 0.7452752 \right) \right)$$

Összehasonlításaként közöljük Hardy és Littlewood ikerprímek számára vonatkozó eredményét (lásd [4]), amely szerint, ha x természetes szám, akkor az 1-től x -ig előforduló ikerprímek száma:

$$(41) \quad T(x) \approx C \cdot \left(\frac{x}{(\log x)^2} \right) \quad ahol \quad C = 2 \prod_{p>2} \left(1 - \frac{1}{(p-1)^2} \right) = 1.32032...$$

ahol $p>2$ a 2-nél nagyobb prímszámokat jelenti x -ig.

Az alábbi 2. tábla összehasonlító adatokat mutat be az ikerprímek számának valódi és fentiekben bemutatott közelítő értékeire. Az ikerprímek valódi számát 1 - N-ig $RT(N)$ -el jelöljük.

A (41) eredmény további javításait Lovas József személyes közlése alapján mutatják be a (42)-(44) összefüggések, amelyekhez tartozó értékeket is tartalmazza a 3. táblázat.

A 2. és 3. táblázatban szereplő $RT(N)$ értékek [9]-ben megtalálhatók.

$$(42) \quad M1(x) \approx C \cdot \left(\frac{x}{((\ln x) - 1)^2} \right) \quad ahol \quad C = 2 \prod_{p>2} \left(1 - \frac{1}{(p-1)^2} \right) = 1.32032...$$

$$(43) \quad M2(x) \approx C \cdot \left(\frac{x}{\left((\ln x) - 1 - \frac{1.5}{\ln x} \right)^2} \right) \quad ahol \quad C = 2 \prod_{p>2} \left(1 - \frac{1}{(p-1)^2} \right) = 1.32032...$$

$$(44) \quad M_3(x) \approx C \cdot \left(\frac{x}{\left((\ln x) - 1 - \frac{1.5}{\ln x} - \frac{5.5}{(\ln x)^2} \right)^2} \right) \quad \text{ahol} \quad C = 2 \prod_{p \geq 2} \left(1 - \frac{1}{(p-1)^2} \right) = 1.32032...$$

2. Tábla

N	$\frac{m(N)}{K(N)}$	RT(N)	T(N)	$\frac{T(N)}{RT(N)}$
1.0E+003	.02157	35	35	1
2.0E+003	.10311	61	61	1
3.0E+003	.14719	81	81	1
4.0E+003	.18722	103	103	1
5.0E+003	.21933	126	126	1
1.0E+004	.27516	205	205	1
5.0E+004	.39450	705	705	1
1.0E+005	.43646	1.224	1.224	1
5.0E+005	.51644	4.565	4.565	1
8.0E+005	.53607	6.766	6.766	1
1.0E+006	.54490	8.169	8.169	1
2.0E+006	.57075	14.871	14.869	.99986
3.0E+006	.58426	20.933	20.928	.99976
4.0E+006	.59354	26.861	26.856	.99981
5.0E+006	.60034	32.464	32.455	.99972
8.0E+006	.61407	48.619	48.605	.99971
1.0E+007	.62030	58.980	58.973	.99988
2.0E+007	.63840	107.407	107.405	.99998
3.0E+007	.648253	152.891	152.890	.99999
4.0E+007	.654953	196.753	196.750	.99998
5.0E+007	.659964	239.101	239.102	1.00000
8.0E+007	.670096	361.450	361.449	.99999
1.0E+008	.6747145	440.312	440.311	.99999
2.0E+008	.6882747	813.371	813.368	.99999
3.0E+008	.6957125	1.166.480	1.166.476	.99999
4.0E+008	.7007864	1.507.733	1.507.728	.99999
5.0E+008	.7046087	1.840.170	1.840.162	.99999
8.0E+008	.7123583	2.802.751	2.802.737	.99999
1.0E+009	.7159024	3.424.506	3.424.487	.99999
2.0E+009	.7263827	6.388.041	6.387.993	.99999
5.0E+009	.7391307	14.618.166	14.618.030	.99999
5.0E+010	.7665543	118.903.682	118.904.205	1.00000
1.0E+011	.7737398	224.376.048	224.376.574	1.00000
5.0E+011	.7888384	986.222.314	986.229.575	1.00000
1.0E+015	.8396380	1.177209E+12	1.177236E+12	1.00002
1.0E+030	.9237084	2.850792E+26	2.850832E+26	1.00001
1.0E+100	.977933621	2.512202E+95	2.512182E+95	.99999
1.0E+150	.985367255	1.113259E+145	1.112067E+145	.99993
1.0E+200	.989054751	6.252928E+194	6.253517E+194	1.00001

3. Tábla

N	RT(N)	$\frac{T(N)}{RT(N)}$	$\frac{T(x)}{RT(N)}$	$\frac{M1(x)}{RT(N)}$	$\frac{M2(x)}{RT(N)}$	$\frac{M3(x)}{RT(N)}$
1.0E+004	205	1	.759	.95544	.99450	1.01072
5.0E+004	705	1	.800	.97108	.99909	1.00886
1.0E+005	1.224	1	.814	.97600	1.0006	1.00870
5.0E+005	4.565	1	.840	.98409	1.0029	1.00827
1.0E+006	8.169	1	.847	.98410	1.0009	1.00554
2.0E+006	14.871	.99986	.844	.97307	.98814	.99200
5.0E+006	32.464	.99972	.855	.97731	.99062	.99382
1.0E+007	58.980	.99988	.862	.97944	.99161	.99441
5.0E+007	239.101	1.00000	.879	.98674	.99680	.99890
1.0E+008	440.312	.99999	.884	.98807	.99737	.99924
2.0E+008	813.371	.99999	.889	.98946	.99809	.99976
5.0E+008	1.840.170	.99999	.894	.99062	.99846	.99991
1.0E+009	3.424.506	.99999	.898	.99111	.99843	.99973
2.0E+009	6.388.041	.99999	.901	.99170	.99854	.99972
5.0E+009	14.618.166	.99999	.905	.99235	.99863	.99966
5.0E+010	118.903.682	1.00000	.915	.99387	.99901	.99978
1.0E+011	224.376.048	1.00000	.917	.99420	.99906	.99976
5.0E+011	986.222.314	.99998	.922	.99496	.99924	.99983
1.0E+015	1.177209E+12	.99997	.940	.99708	.99967	.99994
1.0E+030	2.850792E+26	1.00001	.971	.99932	.99996	.99999
1.0E+100	2.512202E+95	.99620	.991	.99994	.99999	.99999
1.0E+150	1.113259E+145	.96517	.994	.99997	.99999	.99999
1.0E+200	6.252928E+194	.92558	.996	.99998	.99999	.99999

A fentiek alapján megfogalmazzuk a következő sejtést:

SEJTÉS

A prímszámok számának $N/\log(N)$ közelítési hibája (eltérése a valódi $\pi(N)$ értéktől) „körülbelül” megegyezik az ikerprímek számával N -ig. Az eltérés hibáját mutatja a (7) oszlop!

Tehát $\frac{N}{\log(N)}$ tulajdonképpen a prímszámok ikerprímek nélküli számának becslése N -ig (lásd 4. táblázat).

4. Tábla

N	Utolsó prím N-ig	Prímek száma N-ig $\pi(N)$	$\frac{N}{\log(N)}$	Ikerprímek száma N-ig = IP(N)	$\pi(N) -$ $N/\log(N)$ (3)-(4)	$((5)-(6))/(3)$
(1)	(2)	(3)	(4)	(5)	(6)	(7)
1.000	997	168	144	36	22	8%
100.000	99.991	9.592	8.685	1.248	907	3.6%
1.000.000	999.983	78.498	72.382	8.126	6.116	2.6%
2.000.000	1.999.993	148.933	137.848	14.976	11.085	2.6%
3.000.000	2.999.999	216.818	201.151	21.046	15.667	2.5%
5.000.000	4.999.999	348.515	324.150	32.580	24.365	2.4%
8.000.000	7.999.993	539.779	503.304	48.780	36.475	2.3%
10^8		5.761.455	5.428.681	440.312	332.774	1.9%
10^{10}		455.052.512	434.294.482	27.412.679	20.758.030	1.5%

A 2014-ben megjelent [\[10\]](#) dolgozat fordulatot hozott az ikerprímek elméletében, mivel bebizonyította, sőt általánosította az ikerprím sejtést, vagyis ***bizonyított tétel lett, hogy végtelen sok ikerprím létezik.*** Ezen eredmények jó összefoglalása található az [\[5\]](#) angol nyelvű és a [\[6\]](#) magyar nyelvű dolgozatokban.

References

- [1] T.Dénes: Complementary prime-sive
PU.M.A. Volume 12, Number 2., May 2002.
http://www.titoktan.hu/raktar/e_vilagi_gondolatok/PUMA-CPS.htm

http://www.titoktan.hu/raktar/e_vilagi_gondolatok/KomplementerPrimszita.pdf
 - [2] P. Erdős, J. Surányi: Selected chapters from the theory of numbers
(in Hungarian) Polygon, Szeged, 1996.
 - [3] S.W.Golomb: Problem E969: American Math. Monthly, (vol 58. no.5. p 338.) 1951.
 - [4] S.W. Golomb: The Twin Prime Constant
American Math. Monthly, (vol 67. no.8. p 767-769) 1960.
 - [5] Andrew Granville: Bounded gaps between primes
http://www.titoktan.hu/raktar/e_vilagi_gondolatok/Ikerprimek-Bounded-gaps-between-primes-Granville.pdf
 - [6] Harcos Gergely: Prímek, Polignac, Polymath
Matematikai Lapok, 20. évf. 2014/2, 1-13.
 - [7] W.Sierpinski: A Selection of Problems in the Theory of Numbers
Pergamon Press, Oxford, U.K., 1964.
 - [8] Maria Suzuki: Alternative Formulations of the Twin Prime Problem
The Amer. Math. Monthly, Vol. 107. january 2000.
 - [9] Thomas R. Nicely: Some Results of Research in Computational Number Theory
<http://www.trnicely.net/index.html>
 - [10] Y.Zhang: Bounded gaps between primes, Ann. Of Math. (2) 179 (2014), 1121-1174.
http://www.titoktan.hu/raktar/e_vilagi_gondolatok/Ikerprimek-Bounded-gaps-between-primes-Zhang.pdf
-