Dénes Tamás matematikus-kriptográfus
www.titoktan.hu e-mail: **tdenest@freemail.hu**

A Fibonacci sorozat ikerprím elemeiről

A [4] dolgozat a Fibonacci sorozat prímszám elemeit vizsgálta. Most definiáljuk a ***Fibonacci ikerprímeket*** az alábbi 1. definíció szerint.

1. Definíció *(Fibonacci ikerprímek)*

Legyenek p és $p+2$ *ikerprímek*. Ha az u_p, u_{p+2} Fibonacci számok prímek, akkor ezeket *Fibonacci ikerprímeknek* nevezzük.

----- . -----

A [3]-ban bizonyított 1. tétel szerint p és $p+2$ akkor és csak akkor lehetnek ikerprímek, ha $p=6k-1$ alakú, ekkor természetesen $p+2=6k+1$ alakú prímszám. Következésképpen a Fibonacci ikerprímek u_{6k-1}, u_{6k+1} alakúak. A [2]-ben található eredmény szerint:

(1) $$u_{n-1} \cdot u_{n+1} = u_n^2 + (-1)^n \qquad n \geq 1$$

Így (1) alapján fennáll a következő összefüggés:

(2) $$u_{6k-1} \cdot u_{6k+1} = u_{6k}^2 + (-1)^{6k} \quad \Rightarrow \quad u_{6k-1} \cdot u_{6k+1} = u_{6k}^2 + 1$$

Ebből következik a Fibonacci ikerprímekre vonatkozó alábbi tétel:

1. Tétel

u_{6k-1} valamint u_{6k+1} akkor és csak akkor Fibonacci ikerprímek, ha u_{6k}^2+1-nek pontosan két $6v_1 \pm 1, 6v_2 \pm 1$ alakú prímtényezője van, azaz

(3) $$u_{6k}^2 + 1 = (6v_1 \pm 1)(6v_2 \pm 1) \text{ és } 6v_1 \pm 1, 6v_2 \pm 1 \text{ prímek}$$

----- . -----

Ha tovább vizsgáljuk az u_{6k} Fibonacci számot, akkor [4] (2) összefüggése alapján kapjuk:

(4) $$u_{6k} = u_{3k+1}^2 - u_{3k-1}^2 = (u_{3k+1} - u_{3k-1})(u_{3k+1} + u_{3k-1})$$

Másrészt [4] 2. tétele szerint u_{6k} osztható minden olyan Fibonacci számmal, amelynek indexe osztója $6k$-nak, azaz

(5) $$u_{6k} = A \cdot u_6 = 8A \overset{(4)}{=} (u_{3k+1} - u_{3k-1})(u_{3k+1} + u_{3k-1}) \qquad (A \text{ természetes szám})$$

(6) $$u_{6k}=B\cdot u_k\overset{(4)}{=}\left(u_{3k+1}-u_{3k-1}\right)\left(u_{3k+1}+u_{3k-1}\right)$$ (B természetes szám)

Az (5) és (6) egyenlőségek egyszerre teljesülnek, így a (3) összefüggésbe helyettesítve:

(7) $$u_{6k}^2+1=64A^2+1=(6v_1\pm1)(6v_2\pm1)\overset{(5)}{=}\left(u_{3k+1}-u_{3k-1}\right)^2\cdot\left(u_{3k+1}+u_{3k-1}\right)^2+1=$$
$$=u_{3k}^4+4u_{3k-1}\cdot u_{3k}^2\cdot u_{3k+1}+1$$

és

(8) $$u_{6k}^2+1=B^2\cdot u_k^2+1=(6v_1\pm1)(6v_2\pm1)\overset{(6)}{=}\left(u_{3k+1}-u_{3k-1}\right)^2\cdot\left(u_{3k+1}+u_{3k-1}\right)^2+1=$$
$$=u_{3k}^4+4u_{3k-1}\cdot u_{3k}^2\cdot u_{3k+1}+1$$

ahol $6v_1\pm1,\ 6v_2\pm1$ prímek.

Alkalmazzuk u_k-ra a Binet-formulát:

(16) $$u_k^2=\frac{\left[\left(1+\sqrt5\right)^k-\left(1-\sqrt5\right)^k\right]^2}{2^{2k}\cdot5}=\frac{\left(1+\sqrt5\right)^{2k}-2\left(1+\sqrt5\right)^k\left(1-\sqrt5\right)^k+\left(1-\sqrt5\right)^{2k}}{2^{2k}\cdot5}=$$
$$=\frac{\left(6+2\sqrt5\right)^k-2(-4)^k+\left(6-2\sqrt5\right)^k}{2^{2k}\cdot5}=\frac{2^k\left(3+\sqrt5\right)^k-2(-1)^k2^k\cdot2^k+2^k\left(3-\sqrt5\right)^k}{2^k\cdot2^k\cdot5}$$

(17) $$u_k^2=\frac{\left(3+\sqrt5\right)^k-2(-1)^k2^k+\left(3-\sqrt5\right)^k}{2^k\cdot5}$$

Ha k páros, azaz $k=2r$ alakú, akkor (17) alapján:

$$k=2r\quad\Rightarrow\quad u_k^2=\frac{\left(3+\sqrt5\right)^{2r}-2^{2r+1}+\left(3-\sqrt5\right)^{2r}}{2^{2r}\cdot5}\quad\overset{(15)}{\Rightarrow}$$

(18) $$\overset{(15),(12b)}{\Rightarrow}\quad u_{6k}^2+1=64A^2u_k^2+1=\frac{64A^2\left[\left(3+\sqrt5\right)^{2r}-2^{2r+1}+\left(3-\sqrt5\right)^{2r}\right]}{2^{2r}\cdot5}+1=$$
$$=\frac{64A^2\left[\left(3+\sqrt5\right)^{2r}+\left(3-\sqrt5\right)^{2r}\right]-2^{2r}\left(128A^2-5\right)}{2^{2r}\cdot5}=$$
$$=\frac{64A^2\left[\left(3+\sqrt5\right)^{k}+\left(3-\sqrt5\right)^{k}\right]-2^{k}\left(128A^2-5\right)}{2^{k}\cdot5}=(6v-1)(6v+1)$$

Ha k páratlan, azaz $k=2r+1$ alakú, akkor (17) alapján:

$$k = 2r+1 \quad \Rightarrow \quad u_k^2 = \frac{\left(3+\sqrt{5}\right)^{2r+1} + 2^{2r+2} + \left(3-\sqrt{5}\right)^{2r+1}}{2^{2r+1}\cdot 5} \quad \overset{(15)}{\Rightarrow}$$

$$\overset{(15),(12b)}{\Rightarrow} \quad u_{6k}^2 + 1 = 64A^2u_k^2 + 1 = \frac{64A^2\left[\left(3+\sqrt{5}\right)^{2r+1} + 2^{2r+2} + \left(3-\sqrt{5}\right)^{2r+1}\right]}{2^{2r+1}\cdot 5} + 1 =$$

(19)
$$= \frac{64A^2\left[\left(3+\sqrt{5}\right)^{2r+1} + \left(3-\sqrt{5}\right)^{2r+1}\right] + 2^{2r+1}\left(128A^2+5\right)}{2^{2r+1}\cdot 5} =$$

$$= \frac{64A^2\left[\left(3+\sqrt{5}\right)^{k} + \left(3-\sqrt{5}\right)^{k}\right] + 2^{k}\left(128A^2+5\right)}{2^{k}\cdot 5} = (6v-1)(6v+1)$$

A (18) és (19) összefüggésben felhasználjuk az összeg, illetve különbség *k*-adik hatványára vonatkozó, alábbi binomiális összefüggéseket:

(20)
$$(a+b)^k = \binom{k}{0}a^kb^0 + \binom{k}{1}a^{k-1}b^1 + \ldots + \binom{k}{i}a^{k-i}b^i + \ldots + \binom{k}{k}a^0b^k$$

(21)
$$Ha \quad k \quad páros \Rightarrow (a-b)^k = \binom{k}{0}a^kb^0 - \binom{k}{1}a^{k-1}b^1 + \ldots - \binom{k}{i}a^{k-i}b^i + \ldots + \binom{k}{k}a^0b^k$$

(22)
$$Ha \quad k \quad ptlan \Rightarrow (a-b)^k = \binom{k}{0}a^kb^0 - \binom{k}{1}a^{k-1}b^1 + \ldots - \binom{k}{i}a^{k-i}b^i + \ldots - \binom{k}{k}a^0b^k$$

Mivel a (21) és (22) összefüggésekben a páratlan *i*-hez tartozó tagok negatív előjellel szerepelnek, ha ezekhez a (20) sort hozzáadjuk, ezek a tagok kiesnek, a páros *i*-hez tartozó tagok pedig megduplázódnak:

$$Ha \quad k \quad páros \Rightarrow$$

(23)
$$\Rightarrow \quad (a+b)^k + (a-b)^k = 2\binom{k}{0}a^kb^0 + 2\binom{k}{2}a^{k-2}b^2 + \ldots + 2\binom{k}{i}a^{k-i}b^i + \ldots + 2\binom{k}{k}a^0b^k$$

$$\Rightarrow \quad (a+b)^k + (a-b)^k = 2\cdot\sum_{i=0,2,4,\ldots}^{k}\binom{k}{i}a^{k-i}b^i$$

$$Ha \quad k \quad ptlan \Rightarrow$$

(24)
$$\Rightarrow \quad (a+b)^k + (a-b)^k = 2\binom{k}{0}a^kb^0 + 2\binom{k}{2}a^{k-2}b^2 + \ldots + 2\binom{k}{i}a^{k-i}b^i + \ldots + 2\binom{k}{k-1}a^1b^{k-1}$$

$$\Rightarrow \quad (a+b)^k + (a-b)^k = 2\cdot\sum_{i=0,2,4,\ldots}^{k-1}\binom{k}{i}a^{k-i}b^i$$

Legyen $a = 3 \quad és \quad b = \sqrt{5}$, ezt (23), valamint (24)-be helyettesítve kapjuk:

(25)
$$Ha \quad k \quad páros \Rightarrow \quad \left(3+\sqrt{5}\right)^k + \left(3-\sqrt{5}\right)^k = 2\cdot \sum_{i=0,2,4,\ldots}^{k} \binom{k}{i} 3^{k-i}\sqrt{5}^{\,i} \xrightarrow{i \quad páros}$$
$$\xrightarrow{i \quad páros} \left(3+\sqrt{5}\right)^k + \left(3-\sqrt{5}\right)^k = 2\cdot \sum_{i=0,2,4,\ldots}^{k} \binom{k}{i} 3^{k-i} 5^{\frac{i}{2}}$$

Ezt (18)-ba helyettesítve kapjuk:

(26)
$$u_{6k}^2 + 1 = 64A^2 u_k^2 + 1 =$$
$$= \frac{64A^2\left[2\cdot \sum_{i=0,2,4,\ldots}^{k} \binom{k}{i} 3^{k-i} 5^{\frac{i}{2}}\right] - 2^k\left(128A^2 - 5\right)}{2^k \cdot 5} =$$
$$= \frac{128A^2\left[\left(\sum_{i=0,2,4,\ldots}^{k} \binom{k}{i} 3^{k-i} 5^{\frac{i}{2}}\right) - 2^k\right]}{2^k \cdot 5} + 1 = u_{6k-1}\cdot u_{6k+1}$$

(27)
$$Ha \quad k \quad ptlan \Rightarrow \quad \left(3+\sqrt{5}\right)^k + \left(3-\sqrt{5}\right)^k = 2\cdot \sum_{i=0,2,4,\ldots}^{k-1} \binom{k}{i} 3^{k-i}\sqrt{5}^{\,i} \xrightarrow{i \quad páros}$$
$$\xrightarrow{i \quad páros} \left(3+\sqrt{5}\right)^k + \left(3-\sqrt{5}\right)^k = 2\cdot \sum_{i=0,2,4,\ldots}^{k-1} \binom{k}{i} 3^{k-i} 5^{\frac{i}{2}}$$

Ezt (19)-be helyettesítve kapjuk:

(28)
$$u_{6k}^2 + 1 = 64A^2 u_k^2 + 1 =$$
$$= \frac{64A^2\left[2\cdot \sum_{i=0,2,4,\ldots}^{k} \binom{k}{i} 3^{k-i} 5^{\frac{i}{2}}\right] + 2^k\left(128A^2 + 5\right)}{2^k \cdot 5} =$$
$$= \frac{128A^2\left[\left(\sum_{i=0,2,4,\ldots}^{k} \binom{k}{i} 3^{k-i} 5^{\frac{i}{2}}\right) + 2^k\right]}{2^k \cdot 5} + 1 = u_{6k-1}\cdot u_{6k+1}$$

Megjegyzés

Az eddig ismert Fibonacci ikerprímek a *k=1* ($u_5 = 5$, $u_7 = 13$), *k=2* ($u_{11} = 89$, $u_{13} = 233$) értékekhez tartoznak (lásd 1. táblázat).
Kivételnek tekinthető az első Fibonacci ikerprím-pár az $u_3 = 2$, $u_5 = 5$, mivel ebben szerepel az egyetlen páros prímszám.

Nyitott problémák

1. Van-e a Megjegyzésben bemutatotton kívül Fibonacci ikerprím pár?
2. Van-e végtelen sok Fibonacci ikerprím-pár?

References

[1] Vorobjev, N.N.: Fibonacci Numbers
Pergamon Press, New York, 1961.

[2] Verner E. Hoggatt: Fibonacci and Lucas Numbers
Houghton Mifflin Company, Boston, 1969.

[3] Dénes Tamás: **http://www.titoktan.hu/_raktar/_e_vilagi_gondolatok/KomplementerPrimszita.pdf**

[4] Dénes Tamás: http://www.titoktan.hu/_raktar/_e_vilagi_gondolatok/Fibonacci-primek.pdf

1. Táblázat *A Fibonacci sorozat 1-72. elemei és ezek prímfelbontása*

i	u_i	u_i **prímfelbontása**	***i***	u_i	u_i **prímfelbontása**
1	*1*		38	*39.088.169*	37x113x9349
2	*1*		39	*63.245.986*	2x233x135721
prím 3	*2*	prím	40	*102.334.155*	3x5x7x11x41x2161
4	*3*	prím	prím 41	*165.580.141*	2789x59369
prím 5	*5*	prím (6k-1)	42	*267.914.296*	$2^3 \cdot 13 \cdot 29 \cdot 211 \cdot 421$
6	*8*	2^3	prím 43	*433.494.437*	prím (6k-1)
prím 7	*13*	prím (6k+1)	44	*701.408.733*	3x43x89x199x307
8	*21*	3x7	45	*1.134.903.170*	2x5x17x61x109441
9	*34*	2x17	46	*1.836.311.903*	139x461x28657
10	*55*	5x11	prím 47	*2.971.215.073*	prím (6k+1)
prím 11	*89*	prím (6k-1)	48	*4.807.526.976*	$2^6 \cdot 3^2 \cdot 7 \cdot 23 \cdot 47 \cdot 1103$
12	*144*	$2^4 \cdot 3^2 = 12^2$	49	*7.778.742.049*	13x97x6168709
prím 13	*233*	prím (6k-1)	50	*12.586.269.025*	$5^2 \cdot 11 \cdot 101 \cdot 151 \cdot 3001$
14	*377*	13x29	51	*20.365.011.074*	2x1597x6376021
15	*610*	2x5x61	52	*32.951.280.099*	3x233x521x90481
16	*987*	3x7x47	prím 53	*53.316.291.173*	953x55945741
prím 17	*1.597*	prím (6k+1)	54	*86.267.571.272*	$2^3 \cdot 17 \cdot 19 \cdot 53 \cdot 109 \cdot 5779$
18	*2.584*	$2^3 \cdot 17 \cdot 19$	55	*139.583.862.445*	5x89x661x474541
prím 19	*4.181*	37x113	56	*225.851.433.717*	$3 \cdot 7^2 \cdot 13 \cdot 29 \cdot 281 \cdot 14503$
20	*6.765*	3x5x11x41	57	*365.435.296.162*	2x37x113x797x54833
21	*10.946*	2x13x421	58	*591.286.729.879*	59x19489x514229
22	*17.711*	89x199	prím 59	*956.722.026.041*	353x2710260697
prím 23	*28.657*	prím (6k+1)	60	*1.548.008.755.920*	$2^4 \cdot 3^2 \cdot 5 \cdot 11 \cdot 31 \cdot 41 \cdot 61 \cdot 2521$
24	*46.368*	$2^5 \cdot 3^2 \cdot 7 \cdot 23$	prím 61	*2.504.730.781.961*	4513x555003497
25	*75.025*	$5^2 \cdot 3001$	62	*4.052.739.537.881*	557x2417x3010349
26	*121.393*	233x521	63	*6.557.470.319.842*	2x13x17x421x35239681
27	*196.418*	2x17x53x109	64	*10.610.209.857.723*	3x7x47x1087x2207x4481
28	*317.811*	3x13x29x281	65	*17.167.680.177.565*	5x233x14736206161
prím 29	*514.229*	prím (6k-1)	66	*27.777.890.035.288*	$2^3 \cdot 89 \cdot 199 \cdot 9901 \cdot 19801$
30	*832.040*	$2^3 \cdot 5 \cdot 11 \cdot 31 \cdot 61$	prím 67	*44.945.570.212.853*	269x116849x1429913
prím 31	*1.346.269*	557x2417	68	*72.723.460.248.141*	3x67x1597x3571x63443
32	*2.178.309*	3x7x47x2207	69	*117.669.030.460.994*	2x137x829x18077x28657
33	*3.524.578*	2x89x19801	70	*190.392.490.709.135*	5x11x13x29x71x911x141961
34	*5.702.887*	1597x3571	prím 71	*308.061.521.170.129*	6673x46165371073
35	*9.227.465*	5x13x141961	72	*498.454.011.879.264*	$2^5 \cdot 3^3 \cdot 7 \cdot 17 \cdot 19 \cdot 23 \cdot 107 \cdot 103681$
36	*14.930.352*	$2^4 \cdot 3^3 \cdot 17 \cdot 19 \cdot 107$			
prím 37	*24.157.817*	73x149x2221			