Dénes Tamás matematikus-kriptográfus
www.titoktan.hu e-mail: **tdenest@freemail.hu**

A Fibonacci sorozat ikerprím elemeiről

A [4] dolgozat a Fibonacci sorozat prímszám elemeit vizsgálta. Most definiáljuk a ***Fibonacci ikerprímeket*** az alábbi 1. definíció szerint.

1. Definíció *(Fibonacci ikerprímek)*

Legyenek p és $p+2$ *ikerprímek.* Ha az u_p, u_{p+2} Fibonacci számok prímek, akkor ezeket *Fibonacci ikerprímeknek* nevezzük.

----- . -----

A [3]-ban bizonyított 1. tétel szerint p és $p+2$ akkor és csak akkor lehetnek ikerprímek, ha $p=6k-1$ alakú, ekkor természetesen $p+2=6k+1$ alakú prímszám. Következésképpen a Fibonacci ikerprímek u_{6k-1}, u_{6k+1} alakúak. A [2]-ben található eredmény szerint:

(1) $$u_{n-1} \cdot u_{n+1} = u_n^2 + (-1)^n \qquad n \geq 1$$

Így (1) alapján fennáll a következő összefüggés:

(2) $$u_{6k-1} \cdot u_{6k+1} = u_{6k}^2 + (-1)^{6k} \quad \Rightarrow \quad u_{6k-1} \cdot u_{6k+1} = u_{6k}^2 + 1$$

Ebből következik a Fibonacci ikerprímekre vonatkozó alábbi tétel:

1. Tétel

u_{6k-1} valamint u_{6k+1} akkor és csak akkor Fibonacci ikerprímek, ha $u_{6k}^2 + 1$-nek pontosan két $6v_1 \pm 1, 6v_2 \pm 1$ alakú prímtényezője van, azaz

(3) $$u_{6k}^2 + 1 = (6v_1 \pm 1)(6v_2 \pm 1) \text{ és } 6v_1 \pm 1, 6v_2 \pm 1 \text{ prímek}$$

----- . -----

Ha tovább vizsgáljuk az u_{6k} Fibonacci számot, akkor [4] (2) összefüggése alapján kapjuk:

(4) $$u_{6k} = u_{3k+1}^2 - u_{3k-1}^2 = (u_{3k+1} - u_{3k-1})(u_{3k+1} + u_{3k-1})$$

Másrészt [4] 2. tétele szerint u_{6k} osztható minden olyan Fibonacci számmal, amelynek indexe osztója $6k$-nak, azaz

(5) $$u_{6k} = A \cdot u_6 = 8A \overset{(4)}{=} (u_{3k+1} - u_{3k-1})(u_{3k+1} + u_{3k-1}) \qquad (A \text{ természetes szám})$$

(6) $$u_{6k} = B \cdot u_k \overset{(4)}{=} (u_{3k+1} - u_{3k-1})(u_{3k+1} + u_{3k-1}) \qquad (B \text{ természetes szám})$$

Az (5) és (6) egyenlőségek egyszerre teljesülnek, így a (3) összefüggésbe helyettesítve:

(7) $$u_{6k}^2 + 1 = 64A^2 + 1 = (6v_1 \pm 1)(6v_2 \pm 1) \overset{(5)}{=} (u_{3k+1} - u_{3k-1})^2 \cdot (u_{3k+1} + u_{3k-1})^2 + 1 =$$
$$= u_{3k}^4 + 4u_{3k-1} \cdot u_{3k}^2 \cdot u_{3k+1} + 1$$

és

(8) $$u_{6k}^2 + 1 = B^2 \cdot u_k^2 + 1 = (6v_1 \pm 1)(6v_2 \pm 1) \overset{(6)}{=} (u_{3k+1} - u_{3k-1})^2 \cdot (u_{3k+1} + u_{3k-1})^2 + 1 =$$
$$= u_{3k}^4 + 4u_{3k-1} \cdot u_{3k}^2 \cdot u_{3k+1} + 1$$

ahol $6v_1 \pm 1$, $6v_2 \pm 1$ prímek.

Alkalmazzuk u_k-ra a Binet-formulát:

(16) $$u_k^2 = \frac{\left[\left(1+\sqrt{5}\right)^k - \left(1-\sqrt{5}\right)^k\right]^2}{2^{2k} \cdot 5} = \frac{\left(1+\sqrt{5}\right)^{2k} - 2\left(1+\sqrt{5}\right)^k\left(1-\sqrt{5}\right)^k + \left(1-\sqrt{5}\right)^{2k}}{2^{2k} \cdot 5} =$$
$$= \frac{\left(6+2\sqrt{5}\right)^k - 2(-4)^k + \left(6-2\sqrt{5}\right)^k}{2^{2k} \cdot 5} = \frac{2^k\left(3+\sqrt{5}\right)^k - 2(-1)^k 2^k \cdot 2^k + 2^k\left(3-\sqrt{5}\right)^k}{2^k \cdot 2^k \cdot 5}$$

(17) $$u_k^2 = \frac{\left(3+\sqrt{5}\right)^k - 2(-1)^k 2^k + \left(3-\sqrt{5}\right)^k}{2^k \cdot 5}$$

Ha k páros, azaz $k=2r$ alakú, akkor (17) alapján:

$$k = 2r \quad \Rightarrow \quad u_k^2 = \frac{\left(3+\sqrt{5}\right)^{2r} - 2^{2r+1} + \left(3-\sqrt{5}\right)^{2r}}{2^{2r} \cdot 5} \quad \overset{(15)}{\Rightarrow}$$

(18) $$\overset{(15),(12b)}{\Rightarrow} \quad u_{6k}^2 + 1 = 64A^2 u_k^2 + 1 = \frac{64A^2\left[\left(3+\sqrt{5}\right)^{2r} - 2^{2r+1} + \left(3-\sqrt{5}\right)^{2r}\right]}{2^{2r} \cdot 5} + 1 =$$
$$= \frac{64A^2\left[\left(3+\sqrt{5}\right)^{2r} + \left(3-\sqrt{5}\right)^{2r}\right] - 2^{2r}\left(128A^2 - 5\right)}{2^{2r} \cdot 5} =$$
$$= \frac{64A^2\left[\left(3+\sqrt{5}\right)^{k} + \left(3-\sqrt{5}\right)^{k}\right] - 2^{k}\left(128A^2 - 5\right)}{2^{k} \cdot 5} = (6v-1)(6v+1)$$

Ha k páratlan, azaz $k=2r+1$ alakú, akkor (17) alapján:

$$k = 2r+1 \quad \Rightarrow \quad u_k^2 = \frac{\left(3+\sqrt{5}\right)^{2r+1} + 2^{2r+2} + \left(3-\sqrt{5}\right)^{2r+1}}{2^{2r+1}\cdot 5} \overset{(15)}{\Rightarrow}$$

$$\overset{(15),(12b)}{\Rightarrow} \quad u_{6k}^2 + 1 = 64A^2u_k^2 + 1 = \frac{64A^2\left[\left(3+\sqrt{5}\right)^{2r+1} + 2^{2r+2} + \left(3-\sqrt{5}\right)^{2r+1}\right]}{2^{2r+1}\cdot 5} + 1 =$$

(19)
$$= \frac{64A^2\left[\left(3+\sqrt{5}\right)^{2r+1} + \left(3-\sqrt{5}\right)^{2r+1}\right] + 2^{2r+1}\left(128A^2+5\right)}{2^{2r+1}\cdot 5} =$$

$$= \frac{64A^2\left[\left(3+\sqrt{5}\right)^{k} + \left(3-\sqrt{5}\right)^{k}\right] + 2^{k}\left(128A^2+5\right)}{2^{k}\cdot 5} = (6v-1)(6v+1)$$

A (18) és (19) összefüggésben felhasználjuk az összeg, illetve különbség *k*-adik hatványára vonatkozó, alábbi binomiális összefüggéseket:

(20)
$$(a+b)^k = \binom{k}{0}a^kb^0 + \binom{k}{1}a^{k-1}b^1 + \ldots + \binom{k}{i}a^{k-i}b^i + \ldots + \binom{k}{k}a^0b^k$$

(21)
$$Ha \quad k \quad páros \Rightarrow (a-b)^k = \binom{k}{0}a^kb^0 - \binom{k}{1}a^{k-1}b^1 + \ldots - \binom{k}{i}a^{k-i}b^i + \ldots + \binom{k}{k}a^0b^k$$

(22)
$$Ha \quad k \quad ptlan \Rightarrow (a-b)^k = \binom{k}{0}a^kb^0 - \binom{k}{1}a^{k-1}b^1 + \ldots - \binom{k}{i}a^{k-i}b^i + \ldots - \binom{k}{k}a^0b^k$$

Mivel a (21) és (22) összefüggésekben a páratlan *i*-hez tartozó tagok negatív előjellel szerepelnek, ha ezekhez a (20) sort hozzáadjuk, ezek a tagok kiesnek, a páros *i*-hez tartozó tagok pedig megduplázódnak:

$$Ha \quad k \quad páros \Rightarrow$$

(23)
$$\Rightarrow \quad (a+b)^k + (a-b)^k = 2\binom{k}{0}a^kb^0 + 2\binom{k}{2}a^{k-2}b^2 + \ldots + 2\binom{k}{i}a^{k-i}b^i + \ldots + 2\binom{k}{k}a^0b^k$$

$$\Rightarrow \quad (a+b)^k + (a-b)^k = 2\cdot\sum_{i=0,2,4,\ldots}^{k}\binom{k}{i}a^{k-i}b^i$$

$$Ha \quad k \quad ptlan \Rightarrow$$

(24)
$$\Rightarrow \quad (a+b)^k + (a-b)^k = 2\binom{k}{0}a^kb^0 + 2\binom{k}{2}a^{k-2}b^2 + \ldots + 2\binom{k}{i}a^{k-i}b^i + \ldots + 2\binom{k}{k-1}a^1b^{k-1}$$

$$\Rightarrow \quad (a+b)^k + (a-b)^k = 2\cdot\sum_{i=0,2,4,\ldots}^{k-1}\binom{k}{i}a^{k-i}b^i$$

Legyen $a = 3 \quad és \quad b = \sqrt{5}$, ezt (23), valamint (24)-be helyettesítve kapjuk:

(25)
$$Ha \quad k \quad páros \Rightarrow \quad \left(3+\sqrt{5}\right)^k + \left(3-\sqrt{5}\right)^k = 2 \cdot \sum_{i=0,2,4,\ldots}^{k} \binom{k}{i} 3^{k-i} \sqrt{5}^{\,i} \xrightarrow{i \quad páros}$$
$$\xrightarrow{i \quad páros} \left(3+\sqrt{5}\right)^k + \left(3-\sqrt{5}\right)^k = 2 \cdot \sum_{i=0,2,4,\ldots}^{k} \binom{k}{i} 3^{k-i} 5^{\frac{i}{2}}$$

Ezt (18)-ba helyettesítve kapjuk:

(26)
$$u_{6k}^2 + 1 = 64 A^2 u_k^2 + 1 =$$
$$= \frac{64 A^2 \left[2 \cdot \sum_{i=0,2,4,\ldots}^{k} \binom{k}{i} 3^{k-i} 5^{\frac{i}{2}} \right] - 2^k \left(128 A^2 - 5\right)}{2^k \cdot 5} =$$
$$= \frac{128 A^2 \left[\left(\sum_{i=0,2,4,\ldots}^{k} \binom{k}{i} 3^{k-i} 5^{\frac{i}{2}} \right) - 2^k \right]}{2^k \cdot 5} + 1 = u_{6k-1} \cdot u_{6k+1}$$

(27)
$$Ha \quad k \quad ptlan \Rightarrow \quad \left(3+\sqrt{5}\right)^k + \left(3-\sqrt{5}\right)^k = 2 \cdot \sum_{i=0,2,4,\ldots}^{k-1} \binom{k}{i} 3^{k-i} \sqrt{5}^{\,i} \xrightarrow{i \quad páros}$$
$$\xrightarrow{i \quad páros} \left(3+\sqrt{5}\right)^k + \left(3-\sqrt{5}\right)^k = 2 \cdot \sum_{i=0,2,4,\ldots}^{k-1} \binom{k}{i} 3^{k-i} 5^{\frac{i}{2}}$$

Ezt (19)-be helyettesítve kapjuk:

(28)
$$u_{6k}^2 + 1 = 64 A^2 u_k^2 + 1 =$$
$$= \frac{64 A^2 \left[2 \cdot \sum_{i=0,2,4,\ldots}^{k} \binom{k}{i} 3^{k-i} 5^{\frac{i}{2}} \right] + 2^k \left(128 A^2 + 5\right)}{2^k \cdot 5} =$$
$$= \frac{128 A^2 \left[\left(\sum_{i=0,2,4,\ldots}^{k} \binom{k}{i} 3^{k-i} 5^{\frac{i}{2}} \right) + 2^k \right]}{2^k \cdot 5} + 1 = u_{6k-1} \cdot u_{6k+1}$$

Megjegyzések:

1. Az eddig ismert Fibonacci ikerprímek a *k=1* ($u_5 = 5$, $u_7 = 13$), *k=2* ($u_{11} = 89$, $u_{13} = 233$) értékekhez tartoznak (lásd 1. táblázat).
Kivételnek tekinthető az első Fibonacci ikerprím-pár az $u_3 = 2$, $u_5 = 5$, mivel ebben szerepel az egyetlen páros prímszám.

2. A [4]-ben bizonyított 8. tételből adódik, hogy a Fibonacci ikerprímek száma véges. Ha az ott megfogalmazott sejtést, miszerint a legnagyobb Fibonacci prím u_{47}, sikerül bebizonyítani, akkor bizonyítottá válik, hogy az 1. Megjegyzésben felsoroltakon kívül nincs Fibonacci ikerprím pár.

References

[1] Vorobjev, N.N.: Fibonacci Numbers
Pergamon Press, New York, 1961.

[2] Verner E. Hoggatt: Fibonacci and Lucas Numbers
Houghton Mifflin Company, Boston, 1969.

[3] Dénes Tamás: **http://www.titoktan.hu/_raktar/_e_vilagi_gondolatok/KomplementerPrimszita.pdf**

[4] Dénes Tamás: http://www.titoktan.hu/_raktar/_e_vilagi_gondolatok/Fibonacci-primek.pdf

1. Táblázat *A Fibonacci sorozat 1-72. elemei és ezek prímfelbontása*

i	u_i	u_i prímfelbontása	i	u_i	u_i prímfelbontása
1	1		38	39.088.169	37x113x9349
2	1		39	63.245.986	2x233x135721
prím 3	2	prím	40	102.334.155	3x5x7x11x41x2161
4	3	prím	prím 41	165.580.141	2789x59369
prím 5	5	prím (6k-1)	42	267.914.296	$2^3 \cdot 13 \cdot 29 \cdot 211 \cdot 421$
6	8	2^3	prím 43	433.494.437	prím (6k-1)
prím 7	13	prím (6k+1)	44	701.408.733	3x43x89x199x307
8	21	3x7	45	1.134.903.170	2x5x17x61x109441
9	34	2x17	46	1.836.311.903	139x461x28657
10	55	5x11	prím 47	2.971.215.073	prím (6k+1)
prím 11	89	prím (6k-1)	48	4.807.526.976	$2^6 \cdot 3^2 \cdot 7 \cdot 23 \cdot 47 \cdot 1103$
12	144	$2^4 \cdot 3^2 = 12^2$	49	7.778.742.049	13x97x6168709
prím 13	233	prím (6k-1)	50	12.586.269.025	$5^2 \cdot 11 \cdot 101 \cdot 151 \cdot 3001$
14	377	13x29	51	20.365.011.074	2x1597x6376021
15	610	2x5x61	52	32.951.280.099	3x233x521x90481
16	987	3x7x47	prím 53	53.316.291.173	953x55945741
prím 17	1.597	prím (6k+1)	54	86.267.571.272	$2^3 \cdot 17 \cdot 19 \cdot 53 \cdot 109 \cdot 5779$
18	2.584	$2^3 \cdot 17 \cdot 19$	55	139.583.862.445	5x89x661x474541
prím 19	4.181	37x113	56	225.851.433.717	$3 \cdot 7^2 \cdot 13 \cdot 29 \cdot 281 \cdot 14503$
20	6.765	3x5x11x41	57	365.435.296.162	2x37x113x797x54833
21	10.946	2x13x421	58	591.286.729.879	59x19489x514229
22	17.711	89x199	prím 59	956.722.026.041	353x2710260697
prím 23	28.657	prím (6k+1)	60	1.548.008.755.920	$2^4 \cdot 3^2 \cdot 5 \cdot 11 \cdot 31 \cdot 41 \cdot 61 \cdot 2521$
24	46.368	$2^5 \cdot 3^2 \cdot 7 \cdot 23$	prím 61	2.504.730.781.961	4513x555003497
25	75.025	$5^2 \cdot 3001$	62	4.052.739.537.881	557x2417x3010349
26	121.393	233x521	63	6.557.470.319.842	2x13x17x421x35239681
27	196.418	2x17x53x109	64	10.610.209.857.723	3x7x47x1087x2207x4481
28	317.811	3x13x29x281	65	17.167.680.177.565	5x233x14736206161
prím 29	514.229	prím (6k-1)	66	27.777.890.035.288	$2^3 \cdot 89 \cdot 199 \cdot 9901 \cdot 19801$
30	832.040	$2^3 \cdot 5 \cdot 11 \cdot 31 \cdot 61$	prím 67	44.945.570.212.853	269x116849x1429913
prím 31	1.346.269	557x2417	68	72.723.460.248.141	3x67x1597x3571x63443
32	2.178.309	3x7x47x2207	69	117.669.030.460.994	2x137x829x18077x28657
33	3.524.578	2x89x19801	70	190.392.490.709.135	5x11x13x29x71x911x141961
34	5.702.887	1597x3571	prím 71	308.061.521.170.129	6673x46165371073
35	9.227.465	5x13x141961	72	498.454.011.879.264	$2^5 \cdot 3^3 \cdot 7 \cdot 17 \cdot 19 \cdot 23 \cdot 107 \cdot 103681$
36	14.930.352	$2^4 \cdot 3^3 \cdot 17 \cdot 19 \cdot 107$			
prím 37	24.157.817	73x149x2221			