

Prímszámok a Fibonacci sorozatban

Budapest, 2001.

A továbbiakban Fibonacci sorozaton az alapsorozatot ($u_n = 1, 1, 2, 3, 5, \dots$), Fibonacci számon az alapsorozat valamely elemét értjük. N.N.Vorobjev [1]-ben bizonyította az u_n -re vonatkozó alábbi tételt:

$$(1) \quad u_{n+k} = u_{n-1}u_k + u_n u_{k+1} \quad (n, k \text{ természetes számok})$$

Az (1) összefüggésből következnek az alábbi (2), (3), (4) összefüggések:

$$(2) \quad \begin{aligned} u_{2n} &= u_{n-1}u_n + u_n u_{n+1} = u_n(u_{n-1} + u_{n+1}) \Rightarrow \\ \Rightarrow u_n(u_{n-1} + u_{n+1}) &= u_n(u_{n-1} + u_{n-1} + u_n) = u_n^2 + 2u_n u_{n-1} = (u_n + u_{n-1})^2 - u_{n-1}^2 \Rightarrow \\ \Rightarrow u_{2n} &= u_{n+1}^2 - u_{n-1}^2 = (u_{n+1} + u_{n-1})(u_{n+1} - u_{n-1}) \end{aligned}$$

Példa: $n=4, \quad u_3 = 2, \quad u_5 = 5, \quad u_8 = 21 \rightarrow 5^2 - 2^2 = (5+2)(5-2) = 21$

A (2) levezetés szerint tehát, a **Fibonacci sorozat minden páros indexű eleme összetett szám.**

$$(3) \quad \begin{aligned} u_{2n+1} &= u_{n+(n+1)} \xrightarrow{(1)} u_{2n+1} = u_{n-1}u_{n+1} + u_n u_{n+2} = u_{n-1}u_{n+1} + u_n(u_n + u_{n+1}) = \\ &= u_{n-1}u_{n+1} + u_n^2 + u_n u_{n+1} = u_{n+1}(u_{n-1} + u_n) + u_n^2 \Rightarrow u_{2n+1} = u_{n+1}^2 + u_n^2 \end{aligned}$$

Példa: $n=4, \quad u_4 = 3, \quad u_5 = 5, \quad u_9 = 34 \rightarrow 5^2 + 3^2 = 34$

$$(4) \quad u_{2n-1} = u_{n+(n-1)} \xrightarrow{(1)} u_{2n-1} = u_{n-1}u_{n-1} + u_n u_n = u_{n-1}^2 + u_n^2 \Rightarrow u_{2n-1} = u_{n-1}^2 + u_n^2$$

Példa: $n=4, \quad u_3 = 2, \quad u_4 = 3, \quad u_7 = 13 \rightarrow 2^2 + 3^2 = 13$

1. Tétel

Ha u_n a Fibonacci sorozat n -ik eleme, akkor u_{kn} osztható u_n -nel ($k=1,2,3,\dots$).

Bizonyítás (teljes indukció):

A tétel $k=1$ esetén triviális, $k=2$ esetén érvényes a (2) összefüggés, azaz a tétel igaz.

Tegyük fel, hogy k -ig minden természetes számra igaz a tétel, azaz

$$(5) \quad u_{kn} = c \cdot u_n \quad (c \text{ természetes szám})$$

Vizsgáljuk a $k+1$ esetet:

$$(6) \quad \begin{aligned} u_{(k+1)n} &= u_{kn+n} = u_{kn-1} \cdot u_n + u_{kn} \cdot u_{n+1} = \\ &= u_{kn-1} \cdot u_n + c \cdot u_n \cdot u_{n+1} = u_n (u_{kn-1} + c \cdot u_{n+1}) \end{aligned}$$

Q.E.D.

Példa: $u_{11} = 89$ $u_{22} = 89 \cdot 199$ $u_{33} = 2 \cdot 89 \cdot 19801$
 $u_{22} = 89 \cdot 199$ $u_{44} = 3 \cdot 43 \cdot 89 \cdot 199 \cdot 307$ $u_{66} = 2^3 \cdot 89 \cdot 199 \cdot 9901 \cdot 19801$
 $u_{33} = 2 \cdot 89 \cdot 19801$ $u_{66} = 2^3 \cdot 89 \cdot 199 \cdot 9901 \cdot 19801$

Az 1. tétel általánosításaként adódik a **Fibonacci sorozat összetett elemeire** vonatkozó szükséges és elegendő egzisztencia tétel:

2. Tétel

Legyen az n index prímfelbontása $n=p_1 p_2 \dots p_k$. u_q akkor és csak akkor osztója u_n -nek, ha $q \in \{p_1, p_2, \dots, p_k\}$.

A bizonyítás szükségessége és elegendősége egyaránt az 1. tételből következik.

Következmény:

A 2. tétel jelöléseit használva kapjuk, hogy u_n osztható $lkkt(u_{p_1}, u_{p_2}, \dots, u_{p_k})$ -vel¹.

Példa: $n=42 = 2 \cdot 3 \cdot 7$ ekkor $n_1 = 2$ $n_2 = 3$ $n_3 = 7$ $n_4 = 6$ $n_5 = 14$ $n_6 = 21$
 $u_2 = 1$ $u_3 = 2$ $u_7 = 13$ $u_6 = 2^3$ $u_{14} = 13 \cdot 29$ $u_{21} = 2 \cdot 13 \cdot 421$
 $lkkt(1, 2, 13, 2^3, 13 \cdot 29, 2 \cdot 13 \cdot 421) = 2^3 \cdot 13 \cdot 29 \cdot 421 = \frac{u_{42}}{211}$

¹ $lkkt$ = a legkisebb közös többszörös jelölése. Ezzel analóg tétel található [2]-ben a legnagyobb közös osztóra.

3. Tétel

Ha u_n prímszám, akkor n is prímszám.

Bizonyítás:

Ha u_n prímszám, akkor csak két osztója van $u_1 = 1$ és u_n , ekkor a 2. tétel miatt n összes osztója 1 és n , azaz n prímszám.

Q.E.D.

A 3. tétel megfordítása csak az alábbi megszorítással érvényes (lásd 4. tétel).

4. Tétel

Ha n prímszám, akkor u_n vagy prímszám, vagy nincs olyan prímtényezője, amelyik Fibonacci szám.

Bizonyítás:

Tegyük fel, hogy n prímszám és $u_n = k \cdot u_i$ ($i < n$), ekkor a 2. tétel értelmében n i -nek többszöröse, ami ellentmondás. Tehát u_n prímtényezői között nincs Fibonacci szám, kivéve, ha prímszám és az egyetlen prímtényezője önmaga.

Q.E.D.

5. Tétel

Ha $n = 6k \pm 1$ ($k=1,2,3,\dots$) alakú, akkor u_n is az, azaz

$$(7) \quad n = 6k \pm 1 \Rightarrow u_n \equiv \pm 1 \pmod{6}$$

Bizonyítás (teljes indukció):

$k=1$ esetén $u_5 = 5$, $u_7 = 13$ tehát a tétel állítása teljesül.

Tegyük fel, hogy k -ra teljesül a tétel. Vizsgáljuk $k+1$ -re a $6(k+1) \pm 1$ esetet:

$$(8) \quad u_{6(k+1) \pm 1} = u_{6k+1 \pm 6} \xrightarrow{(1)} u_{6k} u_6 + u_{6k+1} u_7 = (u_{6k+1} - u_{6k-1}) u_6 + u_{6k+1} u_7 = \\ = u_{6k+1} (u_6 + u_7) - u_{6k-1} u_6 = u_{6k+1} u_8 - u_{6k-1} u_6 = 21 \cdot u_{6k+1} - 8 \cdot u_{6k-1}$$

Az indukciós feltétel szerint $u_{6k \pm 1} \equiv \pm 1 \pmod{6}$, tehát a (8) levezetés eredményeként kapott kifejezés $\pmod{6}$ maradékait az alábbi táblázat foglalja össze:

$21 \cdot u_{6k+1} - 8 \cdot u_{6k-1} \pmod{6}$
3 +1 2 -1 +1

Most vizsgáljuk meg a $6(k+1)-1$ esetet:

$$(9) \quad u_{6(k+1)-1} = u_{6k+1+4} \xrightarrow{(1)} u_{6k} u_4 + u_{6k+1} u_5 = (u_{6k+1} - u_{6k-1}) u_4 + u_{6k+1} u_5 = \\ = u_{6k+1} (u_4 + u_5) - u_{6k-1} u_4 = u_{6k+1} u_6 - u_{6k-1} u_4 = 8 \cdot u_{6k+1} - 3 \cdot u_{6k-1}$$

Az indukciós feltétel szerint $u_{6k \pm 1} \equiv \pm 1 \pmod{6}$, tehát a (9) levezetés eredményeként kapott kifejezés $\pmod{6}$ maradékát az alábbi táblázat foglalja össze:

$8 \cdot u_{6k+1} - 3 \cdot u_{6k-1} \pmod{6}$
2 +1 3 -1 -1

Q.E.D.

Ha az 5. tételt összevetjük a prímszámokra vonatkozó [3]-ban bizonyított 1. tétellel, mely szerint minden prímszám $6k-1$, vagy $6k+1$ alakú, akkor az alábbi 6. tételhez jutunk:

6. Tétel

Ha n prímszám, akkor u_n $6k \pm 1$ alakú.

Ha a 6.tételt a [3]-ban bizonyított 2. tétellel (Komplementer Prímszita tétel) vetjük össze, akkor a következő 7.tételhez jutunk:

7. Tétel

Ha n prímszám és u_n nem prím, valamint r az u_n prímtényezőinek száma, akkor

$$(10) \quad u_n = \prod_{i=1}^r (6k_i \pm 1)$$

Figyelembe véve a fenti 4. tételt adódik, hogy a (10)-ben szereplő $6k_i \pm 1$ prímtényezők egyike sem Fibonacci szám.

Példák: $n=19, u_{19} = 4181 = (6 \cdot 6 + 1)(19 \cdot 6 - 1) = 37 \cdot 113$
 $n=31, u_{31} = 1346269 = (93 \cdot 6 - 1)(403 \cdot 6 - 1) = 557 \cdot 2417$

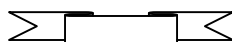
További példák e dolgozat végén közölt 1. táblázatban található.

Az összetett Fibonacci számok, így a Fibonacci prímek szempontjából is fontos eredmény található bizonyítással [2]-ben (57. oldal), mely szerint:

$$(11) \quad u_{n-1} \cdot u_{n+1} = u_n^2 + (-1)^n \quad n \geq 1$$

Nyitott probléma:

Van-e végtelen sok prímszám eleme a Fibonacci sorozatnak?



A 3. és 4.tétel a Fibonacci sorozat prímszám tagjait vizsgálta. Most definiáljuk a **Fibonacci ikerprímeket** az alábbiak szerint:

Legyenek p és $p+2$ ikerprímek. Ha az u_p, u_{p+2} Fibonacci számok is prímek, akkor ezeket Fibonacci ikerprímeknek nevezzük.

A [3]-ban bizonyított 1. tétel szerint p és $p+2$ akkor és csak akkor lehetnek ikerprímek, ha $p=6k-1$ alakú, ekkor természetesen $p+2=6k+1$ alakú prímszám. Következésképpen a Fibonacci ikerprímek u_{6k-1}, u_{6k+1} alakúak, azaz (11) alapján fennáll a következő összefüggés:

$$(12) \quad u_{6k-1} \cdot u_{6k+1} = u_{6k}^2 + (-1)^{6k} \Rightarrow u_{6k-1} \cdot u_{6k+1} = u_{6k}^2 + 1$$

Ha tovább vizsgáljuk az u_{6k} Fibonacci számot, akkor a (2) összefüggés alapján kapjuk, hogy

$$(13) \quad u_{6k} = u_{3k+1}^2 - u_{3k-1}^2 = (u_{3k+1} - u_{3k-1})(u_{3k+1} + u_{3k-1})$$

Másrészt az 2. tétel szerint osztható minden olyan Fibonacci számmal, melynek indexe osztója $6k$ -nak, azaz

$$(14) \quad u_{6k} = A \cdot u_6 \cdot u_k = 2^3 \cdot A \cdot u_k \quad (A = \text{természetes szám})$$

Ebből következik a Fibonacci ikerprímekre vonatkozó alábbi tétel:

8. Tétel

u_{6k-1} valamint u_{6k+1} akkor és csak akkor Fibonacci ikerprímek, ha $u_{6k}^2 + 1$ -nek pontosan két prímtényezője van.

Megjegyzés:

Az eddig ismert Fibonacci ikerprímek a $k=1$ ($u_5 = 5, u_7 = 13$), $k=2$ ($u_{11} = 89, u_{13} = 233$) értékekhez tartoznak (lásd 1. táblázat).

Kivételnek tekinthető az első Fibonacci ikerprím-pár az $u_3 = 2, u_5 = 5$, mivel ebben szerepel az egyetlen páros prímszám.

Nyitott problémák:

- Van-e a felsorolt hármon kívül Fibonacci ikerprím-pár ?
- Van-e végtelen sok Fibonacci ikerprím-pár ?

References

- [1] Vorobjev, N.N.: Fibonacci Numbers
Pergamon Press, New York, 1961.
- [2] Verner E. Hoggatt: Fibonacci and Lucas Numbers
Houghton Mifflin Company, Boston, 1969.
- [3] Dénes Tamás: http://www.titoktan.hu/raktar/e_vilagi_gondolatok/CPSmagy.htm

1. Táblázat A Fibonacci sorozat 1-72. elemei és ezek prímfelbontása

i	u_i	u_i prímfelbontása	i	u_i	u_i prímfelbontása
1	1		38	39.088.169	37x113x9349
2	1		39	63.245.986	2x233x135721
prím 3	2	prím	40	102.334.155	3x5x7x11x41x2161
4	3	prím	prím 41	165.580.141	2789x59369
prím 5	5	prím (6k-1)	42	267.914.296	$2^3 \cdot 13 \cdot 29 \cdot 211 \cdot 421$
6	8	2^3	prím 43	433.494.437	prím (6k-1)
prím 7	13	prím (6k+1)	44	701.408.733	3x43x89x199x307
8	21	3x7	45	1.134.903.170	2x5x17x61x109441
9	34	2x17	46	1.836.311.903	139x461x28657
10	55	5x11	prím 47	2.971.215.073	prím (6k+1)
prím 11	89	prím (6k-1)	48	4.807.526.976	$2^6 \cdot 3^2 \cdot 7 \cdot 23 \cdot 47 \cdot 1103$
12	144	$2^4 \cdot 3^2 = 12^2$	49	7.778.742.049	13x97x6168709
prím 13	233	prím (6k-1)	50	12.586.269.025	$5^2 \cdot 11 \cdot 101 \cdot 151 \cdot 3001$
14	377	13x29	51	20.365.011.074	2x1597x6376021
15	610	2x5x61	52	32.951.280.099	3x233x521x90481
16	987	3x7x47	prím 53	53.316.291.173	953x55945741
prím 17	1.597	prím (6k+1)	54	86.267.571.272	$2^3 \cdot 17 \cdot 19 \cdot 53 \cdot 109 \cdot 5779$
18	2.584	$2^3 \cdot 17 \cdot 19$	55	139.583.862.445	5x89x661x474541
prím 19	4.181	37x113	56	225.851.433.717	$3 \cdot 7^2 \cdot 13 \cdot 29 \cdot 281 \cdot 14503$
20	6.765	3x5x11x41	57	365.435.296.162	2x37x113x797x54833
21	10.946	2x13x421	58	591.286.729.879	59x19489x514229
22	17.711	89x199	prím 59	956.722.026.041	353x2710260697
prím 23	28.657	prím (6k+1)	60	1.548.008.755.920	$2^4 \cdot 3^2 \cdot 5 \cdot 11 \cdot 31 \cdot 41 \cdot 61 \cdot 2521$
24	46.368	$2^5 \cdot 3^2 \cdot 7 \cdot 23$	prím 61	2.504.730.781.961	4513x555003497
25	75.025	$5^2 \cdot 3001$	62	4.052.739.537.881	557x2417x3010349
26	121.393	233x521	63	6.557.470.319.842	2x13x17x421x35239681
27	196.418	2x17x53x109	64	10.610.209.857.723	3x7x47x1087x2207x4481
28	317.811	3x13x29x281	65	17.167.680.177.565	5x233x14736206161
prím 29	514.229	prím (6k-1)	66	27.777.890.035.288	$2^3 \cdot 89 \cdot 199 \cdot 9901 \cdot 19801$
30	832.040	$2^3 \cdot 5 \cdot 11 \cdot 31 \cdot 61$	prím 67	44.945.570.212.853	269x116849x1429913
prím 31	1.346.269	557x2417	68	72.723.460.248.141	3x67x1597x3571x63443
32	2.178.309	3x7x47x2207	69	117.669.030.460.994	2x137x829x18077x28657
33	3.524.578	2x89x19801	70	190.392.490.709.135	5x11x13x29x71x911x141961
34	5.702.887	1597x3571	prím 71	308.061.521.170.129	6673x46165371073
35	9.227.465	5x13x141961	72	498.454.011.879.264	$2^5 \cdot 3^3 \cdot 7 \cdot 17 \cdot 19 \cdot 23 \cdot 107 \cdot 103681$
36	14.930.352	$2^4 \cdot 3^3 \cdot 17 \cdot 19 \cdot 107$			
prím 37	24.157.817	73x149x2221			