Dénes Tamás *matematikus-kriptográfus*
www.titoktan.hu e-mail: **tdenest@freemail.hu**

Az alap-Fibonacci sorozat és az általánosított Fibonacci-típusú sorozat összefüggései

Budapest, 2001.

A továbbiakban alap-Fibonacci sorozaton az alapsorozatot (jele: u_n=1, 1, 2, 3, 5, ...), általános, azaz Fibonacci-típusú sorozaton (jele: a_n) olyan Fibonacci sorozatot értünk, amelyben az első két tag tetszőleges természetes szám.

1. Tétel
Ha a_n általános Fibonacci sorozat, akkor érvényes az alábbi összefüggés:

(1) $$a_n = a_1 \cdot u_{n-2} + a_2 \cdot u_{n-1}$$

Bizonyítás (teljes indukció):
$n=3$ esetén $u_1 = 1,\quad u_2 = 1 \Rightarrow \quad a_3 = a_1 + a_2$ ami definíció szerint igaz.

Tegyük fel, hogy n-ig igaz az állítás, ekkor $n+1$-re felírva:

(2) $$a_{n+1} = a_n + a_{n-1} \xrightarrow{(1)} a_{n+1} = a_1 \cdot u_{n-2} + a_2 \cdot u_{n-1} + a_{n-1}$$

Az indukciós feltétel miatt:

(3) $$a_{n+1} = a_1 \cdot u_{n-2} + a_2 \cdot u_{n-1} + a_1 \cdot u_{n-3} + a_2 \cdot u_{n-2} = a_1 \underbrace{(u_{n-2} + u_{n-3})}_{u_{n-1}} + a_2 \underbrace{(u_{n-1} + u_{n-2})}_{u_n}$$

Ez éppen a tétel állítását bizonyítja. Q.E.D.

Megjegyzés:
Ha $a_1 = a_2 = 1 \xrightarrow{(1)} a_n = u_{n-2} + u_{n-1} = u_n$, ami éppen az alap-Fibonacci sorozat.

Példa:
$a_1 = 111,\quad a_2 = 222\quad$ *ekkor az* a_n *sorozat* $\rightarrow$ 111, 222, 333, 555, 888, 1443, 2331, 3774
Az (1) összefüggés szerint a_8 a következő: $u_6 = 8,\quad u_7 = 13 \Rightarrow a_8 = 111 \cdot 8 + 222 \cdot 13 = 3774$

2.Tétel

(4) $$u_n = 1 + \sum_{i=1}^{n-2} u_i$$

Bizonyítás (teljes indukció):
n=3 esetén az állítás igaz, mivel $u_3 = 1 + u_1 = 1 + 1 = 2$.
Tegyük fel, hogy *n-1*-ig minden természetes számra teljesül az állítás, ekkor

$$u_n = u_{n-1} + u_{n-2} = 1 + \sum_{i=1}^{n-3} u_i + 1 + \sum_{j=1}^{n-4} u_j = 2 + 2\sum_{i=1}^{n-4} u_i \quad + u_{n-3} =$$

$$= 2\underbrace{(1 + \sum_{i=1}^{n-4} u_i)}_{u_{n-2}} + u_{n-3} = u_{n-2} + \underbrace{u_{n-2} + u_{n-3}}_{u_{n-1}} = u_n$$

Q.E.D.

Következmény:
Legyen *n=m+d* *(d=1,2,3,...)*, ekkor a 2.tétel alapján:

(5) $$u_n = u_{m+d} = 1 + \sum_{i=1}^{m+d-2} u_i = \underbrace{1 + \sum_{i=1}^{m-2} u_i}_{u_m} + \sum_{j=m-1}^{m+d-2} u_j = u_m + \sum_{j=m-1}^{n-2} u_j$$