Dénes Tamás *matematikus-kriptográfus*
www.titoktan.hu e-mail: tdenest@freemail.hu

Az alap-Fibonacci sorozat és az általánosított Fibonacci-típusú sorozat összefüggései

A továbbiakban *alap-Fibonacci sorozaton* az alapsorozatot (jele: $u_n=1,1,2,3,5,\ldots$), általános, azaz *Fibonacci-típusú sorozaton* (jele: a_n) olyan Fibonacci sorozatot értünk, amelyben az első két tag tetszőleges természetes szám lehet. Definíció szerint $u_0=0$.

1. Tétel

Tetszőleges $n\geq 2$ egész szám esetén a_n-re érvényes az (1) összefüggés.

(1) $$a_n = a_1 \cdot u_{n-2} + a_2 \cdot u_{n-1}$$

Bizonyítás (teljes indukció)

Mivel definíció szerint $u_0=0$ és $u_1=1$, ezért $n=2$ esetén $a_2=a_2$, azaz a tétel állítása igaz.
Tegyük fel, hogy n-ig igaz az állítás, ekkor $n+1$-re felírva:

(2) $$a_{n+1} = a_n + a_{n-1} \xrightarrow{(1)} a_{n+1} = a_1 \cdot u_{n-2} + a_2 \cdot u_{n-1} + a_{n-1}$$

Az indukciós feltétel miatt (2)-ből következik:

(3) $$a_{n+1} = a_1 \cdot u_{n-2} + a_2 \cdot u_{n-1} + a_1 \cdot u_{n-3} + a_2 \cdot u_{n-2} = a_1 \underbrace{\left(u_{n-2} + u_{n-3}\right)}_{u_{n-1}} + a_2 \underbrace{\left(u_{n-1} + u_{n-2}\right)}_{u_n}$$

Q.E.D.

Példa

$a_1=111$, $a_2=222$, ekkor az a_n sorozat: 111, 222, 333, 555, 888, 1443, 2331, 3774
Az (1) összefüggés szerint a_8 a következő: $u_6=8$, $u_7=13 \Rightarrow a_8=111\cdot 8+222\cdot 13=3774$

----- . -----

2. Tétel

Ha $n \geq 2$, akkor a Fibonacci-típusú sorozatra teljesül, hogy

(4) $$a_n = a_1 + \sum_{i=0}^{n-2} a_i \qquad (n \geq 2)$$

Bizonyítás (teljes indukció)

n=2 esetén az állítás igaz, mivel (4)-be helyettesítve kapjuk, hogy $a_2 = a_1 + a_0$, ami valóban az a_n Fibonacci-típusú sorozat második tagja.

Tegyük fel, hogy *n-1*-ig minden természetes számra teljesül a (4) állítás, ekkor

$$a_n = a_{n-1} + a_{n-2} = \left(a_1 + \sum_{i=0}^{n-3} a_i \right) + \left(a_1 + \sum_{j=0}^{n-4} a_j \right) = 2a_1 + 2\sum_{i=0}^{n-4} a_i + a_{n-3} =$$

(5) $$= \underbrace{2\left(a_1 + \sum_{i=0}^{n-4} a_i \right)}_{\xrightarrow{indukció} a_{n-2}} + a_{n-3} = a_{n-2} + \underbrace{a_{n-2} + a_{n-3}}_{a_{n-1}} = a_n$$

Q.E.D.

A 2. tétel speciális eseteként adódik az alap-Fibonacci sorozatra:

(6) $$u_n = 1 + \sum_{i=0}^{n-2} u_i \qquad (n \geq 2)$$

----- . -----

A 2. tétel következménye:

Legyen *n=m+d* *(d=0,1,2,3,…)*, ekkor a 2. tétel alapján:

(7) $$a_n = a_{m+d} = a_1 + \sum_{i=0}^{m+d-2} a_i = \underbrace{a_1 + \sum_{i=0}^{m-2} a_i}_{a_m} + \sum_{j=m-1}^{m+d-2} a_j = a_m + \sum_{j=m-1}^{n-2} a_j$$

----- . -----

3. Tétel

Bármely $n \geq 1$ egész szám esetén teljesül a következő szükséges és elegendő állítás:

(8) $$a_1 = a_2 \quad \Leftrightarrow \quad a_n = a_1 \cdot u_n$$

Bizonyítás

Az (1) összefüggésből adódik, hogy

(9) $$a_1 = a_2 \overset{(1)}{\Rightarrow} a_n = a_1 (u_{n-2} + u_{n-1}) = a_1 \cdot u_n$$

A (4) összefüggés alapján

(10) $$\xrightarrow{n=2} a_2 = a_1 \cdot u_2 = a_1 \cdot 1 \quad \Rightarrow \quad a_1 = a_2$$

Q.E.D.

A 3. tétel következménye:

(8)-ből következik, hogy az a_n Fibonacci-típusú sorozat akkor és csak akkor alap-Fibonacci sorozat, ha $a_1=a_2=1$.

----- . -----

4. Tétel

Ha a_n és b_n Fibonacci-típusú sorozat, akkor a $c_n=a_n+b_n$ összeg sorozat is Fibonacci-típusú.

Bizonyítás

(11) $$c_n = a_n + b_n \overset{(1)}{=} a_1 \cdot u_{n-2} + a_2 \cdot u_{n-1} + b_1 \cdot u_{n-2} + b_2 \cdot u_{n-1} = \\ (a_1 + b_1)u_{n-2} + (a_2 + b_2)u_{n-1} \Rightarrow \quad c_1 = a_1 + b_1 \quad c_2 = a_2 + b_2$$

Q.E.D.

Példa

a_n*= 2, 2, 4, 6, 10, 16, 26, …*
b_n*= 2, 4, 6, 10, 16, 26, 42, …*
----
c_n*= 4, 6,10, 16, 26, 42,* ***68****, …* és valóban, ha pl. $n = 7 \xrightarrow{(11)} c_5 = (2+2)u_5 + (2+4)u_6 = \\ = 4 \cdot 5 + 6 \cdot 8 = 68$

----- . -----

5. Tétel

Tetszőleges *N* természetes számhoz létezik Fibonacci-típusú sorozat, amelynek *negyedik eleme éppen N*, azaz $a_4=N$.

Bizonyítás

Ha *n=4*, akkor (1) alapján kapjuk:

(12) $$N = a_4 = a_1 \cdot u_2 + a_2 \cdot u_3 = a_1 \cdot 1 + a_2 \cdot 2 = a_1 + 2a_2$$

Ha *N* páros, akkor

(13) $$N = 2k \quad \Rightarrow 2k = a_1 + 2a_2 \quad (k=1,2,3,\ldots)$$

ami mindig teljesül, ha

(14) $$2 \le a_1 \le N-2 \text{ páros szám és } a_2 = \frac{N - a_1}{2}$$

Ha N páratlan, akkor

(15) $$N = 2k + 1 \quad \Rightarrow 2k + 1 = a_1 + 2a_2 \quad (k=1,2,3, \ldots)$$

ami mindig teljesül, ha

(16) $$1 \le a_1 \le N - 1 \text{ páratlan szám és } a_2 = \frac{N - a_1}{2}$$

Q.E.D.

A (14) és (16) összefüggésekből adódik, hogy bármely N-hez $\left[\frac{N}{2}\right]$-féle a_1, a_2 pár, azaz a_n Fibonacci-típusú sorozat létezik. Az 5. tétel szemléltetésére néhány példát mutat be az 1. táblázat, lásd pl. a táblázat 1.-15. sorait.

6. Tétel

Tetszőleges $N\geq 4$ természetes számhoz létezik Fibonacci-típusú sorozat, amelynek *n-edik eleme éppen N*, azaz

(17) $$a_n=N \quad \text{és} \quad n\geq 4$$

Bizonyítás (teljes indukció)

Az 5. tételben bizonyítottuk a 6. tétel állítását $n=4$ esetén.

Tegyük fel, hogy $n>4$ természetes szám és a_n Fibonacci-típusú sorozat, és n-ig igaz a tétel, vagyis minden $N\geq 4$ természetes szám esetén teljesül (17). Vizsgáljuk az $n+1$ esetet:

Az indukciós feltétel miatt, bármely $N_1\geq 4$ természetes számra

(18) $$\exists a_n = N_1 \quad \text{és} \quad a_{n-1} = N - N_1$$

A Fibonacci-típusú sorozat definíciója szerint

(19) $$a_{n+1} = a_n + a_{n-1} \xrightarrow{4.tétel} \exists a_{n+1} = N_1 + N - N_1 = N$$

Q.E.D.

A 6. tétel szemléltetésére lásd az 1. táblázatot.

1. Táblázat

Sor szám	***N***	***a_n***														
		a_1	a_2	a_3	a_4	a_5	a_6	a_7	a_8	a_9	a_{10}	a_{11}	a_{12}	a_{13}	a_{14}	a_{15}
1. alap-Fibon. sorozat	***3***	1	1	2	***3***	5	8	13	21	34	55	89	144	233	377	610
2.	***4***	0	2	2	***4***	6	10	16	26	42	68	110	178	288	466	754
3.	***4***	2	1	3	***4***	7	11	18	29	47	76	123	199	322	521	843
4.	***5***	1	2	3	***5***	8	13	21	34	55	89	144	233	377	610	987
5.	***5***	3	1	4	***5***	9	14	23	37	60	97	157	254	411	665	1076
6.	***6***	0	3	3	***6***	9	15	24	39	63	102	165	267	432	699	1131
7.	***6***	2	2	4	***6***	10	16	26	42	68	110	178	288	466	754	1220
8.	***6***	4	1	5	***6***	11	17	28	45	73	118	191	309	500	809	1309
9.	***7***	1	3	4	***7***	11	18	29	47	76	123	199	322	521	843	1364
10.	***7***	3	2	5	***7***	12	19	31	50	81	131	212	343	555	898	1453
11.	***7***	5	1	6	***7***	13	20	33	53	86	139	225	364	589	953	1542
12.	***8***	0	4	4	***8***	12	20	32	52	84	136	220	356	576	932	1508
13.	***8***	2	3	5	***8***	13	21	34	55	89	144	233	377	610	987	1597
14.	***8***	4	2	6	***8***	14	22	36	58	94	152	246	398	644	1042	1686
15.	***8***	6	1	7	***8***	15	23	38	61	99	160	259	419	678	1097	1775
	…															
16.	***30***	2	14	16	***30***	46	76	122	198	320	518	838	1356	2194	3550	5744
17.	***31***	1	15	16	***31***	47	78	125	203	328	531	859	1390	2249	3639	5888
18.	***32***	2	15	17	***32***	49	81	130	211	341	552	893	1445	2338	3783	6121
	…															
19.	***100***	10	45	55	***100***	155	255	410	665	1075	1740	2815	4555	7370	11925	19295
20.	***101***	11	45	56	***101***	157	258	415	673	1088	1761	2849	4610	7459	12069	19528
21.	***102***	3	3	6	9	15	24	39	63	***102***	165	267	432	699	1131	1830
22.	***102***	2	50	52	***102***	154	256	410	666	1076	1742	2818	4560	7378	11938	19316
	…															

Tetszőleges $N \geq 4$ természetes számhoz határozzuk meg a maximális n_{max} indexet, amelyre a 6. tétel szerint $a_{n_{\max}} = N$ teljesül. Felhasználjuk az alap-Fibonacci sorozatra ismert Binet-formulát, amely szerint

(20) $$u_n = \frac{\left(1+\sqrt{5}\right)^n - \left(1-\sqrt{5}\right)^n}{2^n\sqrt{5}}$$

Vezessük be az egyszerűbb írásmód kedvéért a következő jelöléseket:

(21) $$1+\sqrt{5} = A \qquad 1-\sqrt{5} = B$$

Ekkor (1)-re alkalmazva kapjuk:

(22) $$a_n = a_1\frac{A^{n-2}-B^{n-2}}{2^{n-2}\sqrt{5}} + a_2\frac{A^{n-1}-B^{n-1}}{2^{n-1}\sqrt{5}} \Rightarrow a_n\sqrt{5} = a_1\frac{A^{n-2}-B^{n-2}}{2^{n-2}} + a_2\frac{A^{n-1}-B^{n-1}}{2^{n-1}}$$

(23) $$\lim_{n\to\infty}\frac{A^n-B^n}{2^n} = \left(\frac{A}{2}\right)^n$$

Ezt (22)-be helyettesítve:

(24) $$a_n\sqrt{5} = a_1\frac{A^{n-2}-B^{n-2}}{2^{n-2}} + a_2\frac{A^{n-1}-B^{n-1}}{2^{n-1}} \xrightarrow{(23)} a_n\sqrt{5} = a_1\left(\frac{A}{2}\right)^{n-2} + a_2\left(\frac{A}{2}\right)^{n-1}$$

Ha tehát $a_n=N$, akkor n-re a következő adódik:

(25) $$a_n\sqrt{5} = N\sqrt{5} = a_1\left(\frac{A}{2}\right)^{n-2} + a_2\left(\frac{A}{2}\right)^{n-1} = \left(\frac{A}{2}\right)^{n-2}\left(a_1 + \frac{a_2A}{2}\right) =$$
$$= \left(\frac{A}{2}\right)^{n-2}\left(\frac{2a_1+a_2A}{2}\right) \Rightarrow \frac{2N\sqrt{5}}{2a_1+a_2A} = \left(\frac{A}{2}\right)^{n-2} \Rightarrow$$
$$\Rightarrow \log\left(\frac{2N\sqrt{5}}{2a_1+a_2A}\right) = (n-2)\log\left(\frac{A}{2}\right) \Rightarrow \frac{\log\left(\frac{2N\sqrt{5}}{2a_1+a_2A}\right)}{\log\left(\frac{A}{2}\right)} + 2 = n$$

Az A-ra vonatkozó alsó közelítést felhasználva, bármely N-hez meghatározható n_{max} , azaz a Fibonacci-típusú sorozat maximális indexű tagja.

(26) $$\sqrt{5} \approx 2.236 \Rightarrow A = 1+\sqrt{5} \approx 3.236 \overset{(25)}{\Rightarrow} \frac{\log\left(\frac{4.472N}{2a_1+3.236a_2}\right)}{\log(1.618)} + 2 \approx n_{\max}$$

(26)-ból világos, hogy $n_{\max}$ akkor maximális, ha a_1 és a_2 minimális, azaz $a_1=a_2=1$, vagyis

$$\frac{\log\left(\frac{4.472N}{5.236}\right)}{\log(1.618)}+2=\frac{\log(0.854)+\log N}{\log(1.618)}+2=\frac{-0.0685+\log N}{0.2089}+2\geq n_{\max} \tag{27}$$

$$\Rightarrow \quad \frac{-0.0685+\log N}{0.2089}+2=1.672+\frac{\log N}{0.2089}\geq n_{\max}$$

Ebből következik, hogy adott N esetén kiszámítható a maximális index, amelynél kisebb vagy egyenlő az az n_{max} érték, amelyre $a_{n_{\max}}=N$.
Az 1. táblázatban könnyen ellenőrizhetők az alábbi példák.

Példák

$$N=5 \xrightarrow{(27)} 1.672+\frac{\log 5}{0.2089}\approx 5.018 \quad \Rightarrow \quad n_{\max}\leq 5$$

$$N=32 \xrightarrow{(27)} 1.672+\frac{\log 32}{0.2089}\approx 8.877 \quad \Rightarrow \quad n_{\max}\leq 8$$

$$N=102 \xrightarrow{(27)} 1.672+\frac{\log 102}{0.2089}\approx 11.277 \quad \Rightarrow \quad n_{\max}\leq 11$$