Gráfok maximális sűrűségű részgráfjairól

(Algoritmus maximális teljes részgráf megkeresésére)

Dénes Tamás matematikus
Budapest, 1978.

A gráfelméletben nagy jelentőséggel bír a gráfok sűrűsége, azaz az aktuális élek és a lehetséges maximális (teljes gráf) élszámának aránya. A gyakorlati alkalmazások szempontjából kitüntetett szerepe van a gráfbeli maximális teljes részgráf megkeresésének.
A gyakorlatban talán a legjelentősebb alkalmazás az információs és kommunikációs (kapcsolat) rendszerek, illetve a szociometriában a csoportkohézió vizsgálata.

A teljes részgráfokkal kapcsolatos problémák megoldására különböző algoritmusokat dolgoztak ki (lásd pl. [1], [2], [3]), amelyek általában az úgynevezett backtrack eljárást használják.

Jelen dolgozat 1. fejezetében a gráfok sűrűségének definíciójára alapozva bemutatom, hogy a gráf szögpontszámának, illetve a szögpontok fokszámának változásával, hogyan változik a gráf sűrűsége. Majd bizonyítást nyer a gráf sűrűség additivitási, illetve a gráf sűrítési tétel, amelyek segítségével hatékony algoritmus nyerhető a gráfban lévő adott sűrűségű, illetve teljes részgráfok megtalálására.

A dolgozat 2. fejezetében bevezetem a szögpont által generált részgráf fogalmát, melynek segítségével alapvető tételek mondhatók ki a gráfbeli teljes részgráfok létezésére.

1. Sűrítési tétel multigráfokban

1.1. DEFINÍCIÓ (***multigráf sűrűsége***)
A $G=(P,E)$ multigráfban jelölje a $p_i \in P$ szögpont fokszámát $f(p_i)$, a legnagyobb multiplicitású él súlyát $s_{max}(G)$ (a továbbiakban az egyszerűbb s_{max} jelölést használjuk), ekkor a *G multigráf s(G) sűrűségén* a következőt értjük:

(1.1)
$$s(G) = \frac{\sum_{i=1}^{|P|} f(p_i)}{s_{\max} \cdot |P| \cdot (|P|-1)}$$

Ha bevezetjük a $|P| = n$ jelölést, akkor

(1.2)
$$s(G) = \frac{\sum_{i=1}^{n} f(p_i)}{s_{\max} \cdot n \cdot (n-1)}$$

* * * * *

A *G=(P,E)* multigráf éleinek számára adódik:

(1.3) $$|E| = \frac{\sum_{i=1}^{n} f(p_i)}{2} = \sum_{\forall (p_u p_v) \in E} s_{uv}$$

vagyis a (1.3) összefüggést felhasználva kapjuk az *s(G)* sűrűségre a következőt:

(1.4) $$s(G) = \frac{2 \cdot |E|}{s_{\max} \cdot n(n-1)}$$

Világos, hogy a (1.1)-(1.4) definíciós összefüggésekből egyszerű gráfokra speciális esetként adódik az $s_{max}=1$ eset, hiszen egyszerű gráfokban minden él multiplicitása, azaz súlya *1*.

A *G* gráf sűrűsége tehát a gráf élszáma, és az azonos szögpontszámú teljes gráf élszámának aránya, a maximális élsúllyal normálva. Azaz az *n* szögpontú *él nélküli gráf* (ami nem más, mint szögpontok halmaza) a *legkisebb sűrűségű*, míg az *n* szögpontú *teljes gráf sűrűsége maximális*, hiszen ebben mindegyik szögpont minden másikkal össze van kötve (multigráf esetén, minden él maximális súllyal). Ebből adódik, hogy az *s(G)* sűrűség csak *0* és *1* közötti értékeket vehet fel, vagyis

(1.5) $$\frac{2 \cdot 0}{n(n-1)} = 0 \le s(G) \le \frac{2 \cdot \frac{s_{\max} \cdot n(n-1)}{2}}{s_{\max} \cdot n(n-1)} = 1 \text{ , azaz } \quad 0 \le s(G) \le 1$$

* * * * *

A továbbiakban a levezetéseket egyszerű gráfokra mutatjuk be, hiszen (1.4) alapján a sűrűség csupán az s_{max} normáló tényezőben különbözik multigráfok esetén.
Tudjuk, hogy ha $G_{fa} =(P,E)$ *n* szögpontú fa-gráf, akkor élszáma *n-1*, így (1.4) alapján, csupán a szögpontszám függvényében meghatározható a fa-gráfok sűrűsége.

(1.6) $$s(G_{fa}) = \frac{2 \cdot |E|}{n(n-1)} = \frac{2 \cdot (n-1)}{n(n-1)} = \frac{2}{n}$$

Tehát az (1.6) összefüggésből egyenesen adódik, hogy a szögpontszám növekedésével a fa-gráfok sűrűsége tart a nullához*, vagyis minden határon túl csökken.*

(1.7) $$\lim_{n \to \infty} s(G_{fa}) = \lim_{n \to \infty} \frac{2}{n} = 0$$

* * * * *

Vizsgáljuk meg az (1.4) definíciós összefüggés alapján, hogy adott sűrűség esetén milyen szögpontszám, illetve élszám korlátokat kapunk?

(1.8) $$s(G)=\frac{2\cdot|E|}{n(n-1)} \Rightarrow n^2-n-\frac{2|E|}{s(G)}=0 \Rightarrow \quad n=\frac{1+\sqrt{1+\frac{8\cdot|E|}{s(G)}}}{2}$$

(1.9) $$s(G)=\frac{2\cdot|E|}{n(n-1)} \Rightarrow \quad |E|=\frac{n(n-1)\cdot s(G)}{2}$$

Azaz adott *s(G)* sűrűségű gráfnak maximum az (1.8)-ban levezetett szögpontszáma, és minimum az (1.9)-ben levezetett élszáma lehet[1].
A továbbiakban alapvető jelentősége lesz az *n* szögpontú *G* gráf szögpontjai *átlag fokszámának* (jelölése: γ_G), ezért bevezetjük a következő jelölést:

(1.10) $$\gamma_G=\frac{\sum_{i=1}^{n} f(p_i)}{n}$$

Ezt a jelölést felhasználva a (1.2) definíció szerint a *G* gráf sűrűségére adódik:

(1.11) $$s(G)=\frac{\gamma_G}{n-1}$$

Így szemléletesen is belátható az (1.5) egyenlőtlenség. Hiszen γ_G csak akkor nulla, ha a *G* gráf élek nélküli szögponthalmaz, vagyis a reprezentált rendszer null-struktúra. A maximális sűrűségű teljes gráf esetén viszont minden szögpontot a többi *n-1*-gyel él köt össze, tehát a fokszámok átlaga éppen *n-1*.

* * * * *

A következőkben azt vizsgáljuk, hogy ha a *G* gráfból szögpontokat, illetve éleket hagyunk el (vagy adunk hozzá), akkor hogyan változik a sűrűsége? Megalkotható-e olyan *„sűrítési algoritmus”*, amellyel megtalálhatjuk a *G* gráf legsűrűbb részgráfjait? Fordított irányban, egy gráf bővítése (növekedése) során vannak-e olyan törvényszerűségek, amelyek a sűrűségét megtartják?

1.1. TÉTEL
Legyen *G=(P,E)* összefüggő gráf, és $p_j \in P$, valamint $G' = (P \neg \{p_j\}, E')$, ahol $\neg$ a halmazkivonást jelöli. Továbbá az eddigi jelöléseknek megfelelően, legyen $|P| = n$, ekkor teljesül a (1.12) szükséges és elegendő összefüggés:

[1] Ha például *s(G)=0.5* és $|E| = 100$, akkor (1.8) szerint $n \approx 20$, vagyis egy maximum 20 szögpontú 100 élű gráf lesz 0.5 sűrűségű.
Másrészt, ha *s(G)=0.5* és *n=100*, akkor (1.9) szerint $|E| = 2475$, vagyis egy 100 szögpontú minimum 2475 élű gráf lesz 0.5 sűrűségű.

(1.12) $$s(G') \rangle\ s(G) \Leftrightarrow f(p_j) \langle \frac{\sum_{i=1}^{n} f(p_i)}{n} = \gamma_G$$

Vagyis a G gráf p_j szögpontjának (és természetesen a hozzá tartozó éleknek) az elhagyásával keletkező G' gráf akkor és csak akkor lesz sűrűbb, mint G, ha a p_j szögpont fokszáma kisebb a G-beli átlag fokszámnál.

Bizonyítás

(1.13) $$s(G') = \frac{\left(\sum_{i=1}^{n} f(p_i)\right) - 2f(p_j)}{(n-1)(n-2)} \xrightarrow{(1.10),\ (1.12)} \frac{\left(\sum_{i=1}^{n} f(p_i)\right) - 2f(p_j)}{(n-1)(n-2)} \rangle \frac{\sum_{i=1}^{n} f(p_i)}{n(n-1)} = \frac{\gamma_G}{n-1}$$

(1.14) $$\left(\sum_{i=1}^{n} f(p_i)\right) - 2f(p_j) \rangle (n-2)\gamma_G \quad \Rightarrow \quad \frac{\left(\sum_{i=1}^{n} f(p_i)\right) - (n-2)\gamma_G}{2} \rangle f(p_j) \quad \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \quad \frac{n \cdot \gamma_G - (n-2)\gamma_G}{2} = \gamma_G \rangle f(p_j)$$

A bizonyítás a másik irányban hasonlóan történik, így azt nem részletezzük.

Q.E.D.

A következőkre nézve különösen fontos, hogy az 1.1. tétel továbbgondolásaként vizsgáljuk az *s(G')-s(G)* sűrűség különbséget, így a következő alapvető összefüggéshez jutunk:

(1.15) $$s(G')\text{-}s(G) = \frac{\left(\sum_{i=1}^{n} f(p_i)\right) - 2f(p_j)}{(n-1)(n-2)} - \frac{\sum_{i=1}^{n} f(p_i)}{n(n-1)} =$$

$$= \frac{n \cdot \left(\left(\sum_{i=1}^{n} f(p_i)\right) - 2f(p_j)\right) - (n-2)\sum_{i=1}^{n} f(p_i)}{n(n-1)(n-2)} =$$

$$= \frac{2\left(\sum_{i=1}^{n} f(p_i)\right) - 2n \cdot f(p_j)}{n(n-1)(n-2)} = \frac{4 \cdot |E| - 2n \cdot f(p_j)}{n(n-1)(n-2)}$$

Tehát

(1.16) $$s(G')\text{-}s(G) = \frac{4 \cdot |E| - 2n \cdot f(p_j)}{n(n-1)(n-2)}$$

Az (1.16) egyenlőség jobboldala adott G gráf esetén, akkor lesz maximális, ha $f(p_j)$ minimális, vagyis fennáll a sűrűség növelésére vonatkozó alábbi összefüggés:

(1.17) $$\max\left(s(G') - s(G)\right) \;\Rightarrow\; f(p_j) = \min\left(f(p_1),\ldots, f(p_n)\right)$$

A fentiek alapján világos, hogy jelentőséggel bír a G gráf szögponthalmazának három osztályba sorolása. Ezek az átlag fokszám alatti, feletti és az átlagos fokszámú szögpontok osztályai. Jelöljük tehát az átlag fokszámnál kisebb fokszámú szögpontok (melyekre $f(p_i)\langle\gamma_G$) halmazát P_{γ_G} -vel, ekkor

(1.18) $$P_{\gamma_G} \subset P$$

vagy

(1.19) $$P_{\gamma_G} = \varnothing$$

Az (1.19) helyzet akkor áll elő, ha a G gráf reguláris, hiszen ekkor $\forall p_i \in P \Rightarrow f(p_i) = \gamma_G$

1.2. TÉTEL

Legyen $p_1, p_2 \in P_{\gamma_G}$ és $(p_1 p_2) \in E$, valamint

(1.20) $$G_1 = \left(P \neg \{p_1\}, E_1\right) \text{ és } \gamma' = \frac{2|E_1|}{n-1} \;\Rightarrow\; p_2 \in P_{\gamma_{G_1}}$$

Bizonyítás

$$|E_1| = |E| - f(p_1) \;\Rightarrow\; \gamma' = \frac{2|E| - 2f(p_1)}{n-1} = \frac{\frac{n\cdot 2|E|}{n} - 2f(p_1)}{n-1} = \frac{n\gamma_G - 2f(p_1)}{n-1}$$

Mivel $p_1 \in P_{\gamma_G} \Rightarrow f(p_1)\langle\, \gamma_G \Rightarrow \gamma' \rangle\, \frac{n\gamma_G - 2\gamma_G}{n-1} = \frac{(n-2)\gamma_G}{n-1}$

$$\Rightarrow \gamma_G - \frac{(n-2)\gamma_G}{n-1} \rangle\, \gamma_G - \gamma' \;\Rightarrow\; \frac{\gamma_G}{n-1} \rangle\, \gamma_G - \gamma'$$

Azonban γ_G maximális értéke *n-1* lehet, ez is csak akkor, ha G teljes gráf, így

(1.21) $$\frac{\gamma_G}{n-1} \langle\, 1 \;\Rightarrow\; \gamma_G - \gamma' \langle\, 1$$

Azonban G_1-ben a p_2 szögpont fokszámára teljesül, hogy

(1.22) $$f(p_2)' = f(p_2) - 1$$

Az (1.21) összefüggés kétféleképpen teljesülhet:
$\gamma' \rangle\, \gamma_G$ amikor természetesen teljesül (1.20), vagy $\gamma' \langle\, \gamma_G$ ekkor viszont (1.21) szerint a csökkenés 1-nél kisebb, míg p_2 fokszáma G_1-ben (1.22) szerint 1-gyel kisebb, így $f(p_2)' \langle\, \gamma'$, azaz a (1.20) állítás teljesül.

Q.E.D.

Vezessük be a következő jelölést (a p_1 szögpont fokszámának átlagtól való eltérése):

(1.23) $$f(p_1)=\gamma_G-\varepsilon_1$$

Ekkor az (1.11) összefüggés, illetve az 1.2. tétel levezetése alapján zárt összefüggést kapunk az *s(G₁)*-*s(G)* sűrűség változásra. $s(G)=\dfrac{\gamma_G}{n-1}$ (lásd (1.11)).

(1.24) $$s(G_1)=\frac{\gamma'}{n-2}=\frac{n\gamma_G-2f(p_1)}{(n-1)(n-2)}\xrightarrow{(1.23)\quad(1.11)}s(G_1)=\frac{n\gamma_G-2\gamma_G+2\varepsilon_1}{(n-1)(n-2)}=$$
$$=\frac{(n-2)\gamma_G+2\varepsilon_1}{(n-2)(n-1)}=s(G)+\frac{2\varepsilon_1}{(n-2)(n-1)}\quad\Rightarrow\quad s(G_1)-s(G)=\frac{2\varepsilon_1}{(n-2)(n-1)}$$

* * * * *

Ha az (1.20) szerinti p_2 szögpontot is kivesszük G_1-ből, akkor a $G_2=(P\neg\{p_1,p_2\},E_2)$ gráfhoz jutunk. Ekkor

(1.25) $$|E_2|=|E_1|-f(p_2)'=|E_1|-\left(f(p_2)-1\right)=|E|-f(p_1)-f(p_2)+1$$

(1.26) $$s(G_2)=\frac{2|E_2|}{(n-2)(n-3)}=\frac{2\left(|E_1|-f(p_2)+1\right)}{(n-2)(n-3)}=\frac{\dfrac{2|E_1|(n-1)}{n-1}}{(n-2)(n-3)}-\frac{2\left(f(p_2)-1\right)}{(n-2)(n-3)}=$$
$$=\frac{n-1}{n-3}s(G_1)-\frac{2\left(f(p_2)-1\right)}{(n-2)(n-3)}$$

(1.27) $$f(p_2)=\gamma'-\varepsilon_2$$

Ekkor (1.26)-ba helyettesítve (1.27)-et, kapjuk:

(1.28) $$s(G_2)=\frac{n-1}{n-3}s(G_1)-\frac{2\left(\gamma'-\varepsilon_2-1\right)}{(n-2)(n-3)}=\frac{n-1}{n-3}s(G_1)-\frac{2s(G_1)}{n-3}+\frac{2\left(\varepsilon_2+1\right)}{(n-2)(n-3)}$$

Tehát az *s(G₂)*, *s(G₁)*, valamint *s(G)* sűrűségek között a következő összefüggések állnak fenn:

(1.29) $$s(G_2)=s(G_1)+\frac{2\left(\varepsilon_2+1\right)}{(n-2)(n-3)}$$
$$s(G_2)=s(G)+\frac{2\varepsilon_1}{(n-2)(n-1)}+\frac{2\left(\varepsilon_2+1\right)}{(n-2)(n-3)}$$

Az (1.28), (1.29) levezetések igazolják azt, az 1.1. tétel alapján várt eredményt, hogy megfelelő fokszám feltételek mellett, a *G* gráf „sűríthető”, hiszen a p_1 és p_2 szögpontok fenti feltételek szerinti kiválasztása esetén fennáll a következő rendezés:

(1.30) $$s(G)\ \langle\ s(G_1)\ \langle\ s(G_2)$$

Az 1.2. tétel általánosításaként bebizonyítjuk az alábbi 1.3. tételt.

1.3. TÉTEL ***(gráf sűrítési tétel)***

A fentiekben bevezetett jelöléseket felhasználva, legyen $P'_{\gamma_G} \subseteq P_{\gamma_G}$ úgy, hogy a P'_{γ_G} -beli szögpontok egy teljes részgráfot feszítenek ki *G*-ben. Legyen továbbá $Q \subset P'_{\gamma_G}$ valamint

(1.31) $$G_Q = \left(P\neg Q, E_Q\right)$$

(1.32) $$\gamma_Q = \frac{2\left|E_Q\right|}{\left|P\neg Q\right|}$$

Ekkor igaz, hogy

(1.33) $$P'_{\gamma_G}\neg Q \subseteq P_{\gamma_Q}$$

Azaz a P'_{γ_G} szögponthalmaz bármely részhalmazának *G*-ből történő elhagyása estén, a G_Q gráfban megmaradó P'_{γ_G} -beli szögpontok eleget tesznek a G_Q-beli sűrítési feltételnek, vagyis

(1.34) $$\forall p \in P'_{\gamma_G}\neg Q \quad \Rightarrow \quad f(p) \rangle \gamma_Q$$

Bizonyítás

Ha $\left|P'_{\gamma_G}\right|$ =1 vagy $\left|P'_{\gamma_G}\right|$ =2, akkor az 1.1. és 1.2. tétel érvényes, így az (1.33) állítás (1.12) és (1.20)-al esik egybe, amelyeket bizonyítottunk. A továbbiakban teljes indukciót alkalmazunk. Tegyük fel, hogy $|Q|$-1-re a tétel teljesül.

Mivel a P'_{γ_G} szögponthalmaz teljes gráfot alkot, így a megmaradt $\left|P'_{\gamma_G}\right|$ - $|Q|$ +1 szögpontok bármelyikét választjuk $|Q|$-adiknak (jelöljük ezt *p*-vel), arra teljesülni fog, hogy szomszédos az elhagyott $|Q|$-1 szögpont mindegyikével. Ugyanakkor a kiválasztott *p* szögpont szomszédos a megmaradt $\left|P'_{\gamma_G}\right|$ - $|Q|$ szögpont mindegyikével, így *p* elhagyása esetén a $P'_{\gamma_G} \neg Q$ halmaz mindenegyes szögpontjára teljesülnek a 1.2. tétel feltételei, tehát (1.33) és (1.34) is teljesül.

Q.E.D.

1.4. TÉTEL ***(maximális sűrítés és összefüggőség)***

Ha *G'=(P*$\neg$*p$_j$,E')* a *G=(P,E)* gráf maximális sűrítésével jött létre (lásd (1.17)), azaz *G* legkisebb fokszámú szögpontjának ($p_j = \delta(G)$) elhagyásával, akkor a *G'* gráf összefüggősége (κ (G')) nem csökken (növekszik, vagy megmarad).

(1.35) $G'=(P\neg p_j,E'),\ p_j=\delta(G)\ \Rightarrow\ \kappa(G')\geq\kappa(G)$

Bizonyítás

(1.36)[2] ***t2.*** $\Rightarrow$

$$\kappa_{\max}(G)=\left[\frac{2|E|}{|P|}\right]=\left[\frac{2|E|}{n}\right]\leq\frac{2|E|}{n}$$

$$\kappa_{\max}(G')=\left[\frac{2|E'|}{|P|-1}\right]=\left[\frac{2|E|-\delta(G)}{n-1}\right]\leq\frac{2|E|-\delta(G)}{n-1}$$

(1.37) $$\kappa_{\max}(G')-\kappa_{\max}(G)\leq\frac{2|E|-\delta(G)}{n-1}-\frac{2|E|}{n}=\frac{2|E|-n\delta(G)}{n(n-1)}$$

(1.38) $$(3.2.2.3)\ \Rightarrow\ 2|E|=\sum_{i=1}^{n}f(p_i)\ \Rightarrow\ \frac{2|E|-n\delta(G)}{n(n-1)}=\frac{\sum_{i=1}^{n}f(p_i)\ -n\delta(G)}{n(n-1)}$$

Az (1.38) levezetés eredményeként kapott tört számlálója $\sum_{i=1}^{n}f(p_i)-n\delta(G)$ pontosan akkor nulla, ha a G gráf reguláris, azaz minden szögpontjának fokszáma $\delta(G)$. Minden más esetben pozitív, mivel a szögpontok fokszámai között biztosan van a minimális fokszámnál nagyobb. Ez (1.37) alapján azt jelenti, hogy a $\kappa_{\max}(G')-\kappa_{\max}(G)$ különbség pozitív, vagy nulla, ami pontosan a tétel (1.35) állítását igazolja.

Q.E.D.

1.5. TÉTEL ***(gráf sűrűség additivitása)***

Legyenek $G_1=(P,E_1)$, $G_2=(P,E_2)$ azonos szögponthalmazon definiált n szögpontú gráfok. Ekkor

(1.39) $$s(G_2)\rangle\, s(G_1)\ \Rightarrow\ s(G_1\oplus G_2)\rangle\, s(G_1)$$

Bizonyítás

(1.40) $$G_1\oplus G_2\to\left(P,E_1\bigcup E_2\right)\ \Rightarrow\ s(G_1\oplus G_2)=\frac{2\cdot\left|E_1\bigcup E_2\right|}{n(n-1)}$$

(1.41) $$s(G_2)\rangle\, s(G_1)\xrightarrow{\text{közös szögpont halmaz}}|E_2|\rangle\,|E_1|\Rightarrow E_1\subset\left(E_1\bigcup E_2\right)\Rightarrow$$
$$\Rightarrow\left|E_1\bigcup E_2\right|\rangle\,|E_1|\Rightarrow s(G_1\oplus G_2)\rangle\, s(G_1)$$

Q.E.D.

[2] A szögletes zárójel a benne lévő kifejezés *számértékének egészrészét* jelöli, amelyre mindig igaz, hogy kisebb vagy egyenlő a kifejezés pontos értékénél.

Az 1.5. tétellel bebizonyítottuk, hogy azonos szögpont halmazon értelmezett gráfok esetén, ha sűrűbb gráfot adunk egy kevésbé sűrű gráfhoz, akkor az összeg gráf sűrűbb lesz, mint az eredeti.

2. Gráfbeli teljes részgráfok megkeresése

A következőkben alapvető jelentősége lesz az alábbiakban definiált két fogalomnak.

2.1. DEFINÍCIÓ (***generált részgráf***)

Legyen *G=(P,E)* multigráf és $p_i \in P$. A *G'=(P',E')* gráfot a p_i *szögpont által generált G-beli részgráfnak* nevezzük, ha

(2.1) $$p_j \in P' \Leftrightarrow (p_i p_j) \in E$$

(2.2) $$e_u = (p_j p_k) \in E' \Leftrightarrow p_j, p_k \in P' \quad \text{és} \quad e_u \in E$$

* * * * *

2.2. DEFINÍCIÓ (***független szögpont-halmaz***)

Egy *G=(P,E)* multigráf szögpontjainak *F* részhalmazát *G* egy *független szögpont-halmazának* nevezzük, ha nincs *G*-nek olyan éle, amelynek mindkét végpontja *F*-be tartozik, azaz

(2.3) $$F \subset P,\ p_i \in F \wedge p_j \in F \quad \Rightarrow \quad e = (p_i p_j) \notin E$$

* * * * *

A 2.2. definíció következményeként adódik, hogy a G-beli F független szögponthalmaz $\overline{G}$-ben (*G* komplementere) teljes részgráfot alkot, hiszen

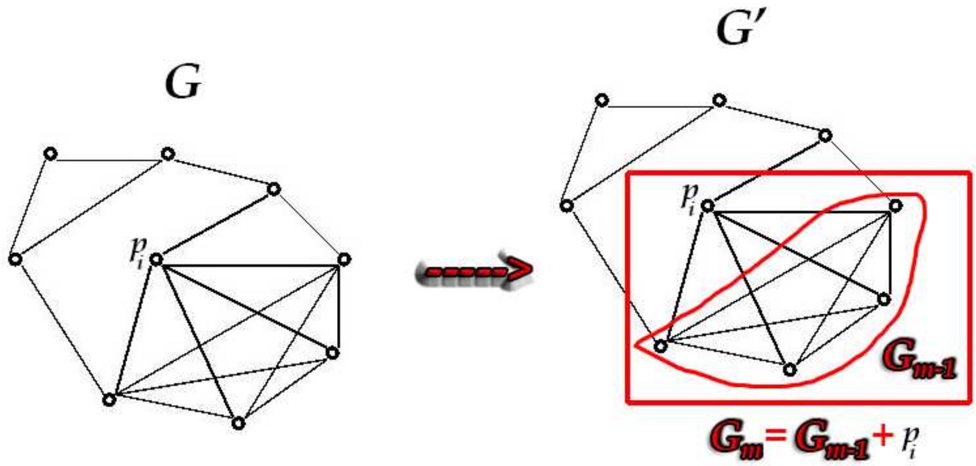
(2.4) $$\overset{(2.3)}{\Rightarrow} \forall p_i, p_j \in F \Rightarrow e = (p_i p_j) \notin E \Rightarrow e \in \overline{G}$$

2.1. TÉTEL

Legyen *G=(P,E)* *n* szögpontú irányítatlan multigráf. *G* akkor és csak akkor tartalmaz $m \le n$ szögpontú teljes részgráfot, ha létezik $p_i \in P$ szögpont által generált *G*-beli részgráf, amely tartalmaz *m-1* szögpontú teljes részgráfot.

Bizonyítás (szükségesség)

Ha létezik $p_i \in P$ amelyre teljesül a tétel feltétele, akkor a p_i által generált *G'*-beli *m-1* szögpontú G_{m-1} teljes részgráfhoz hozzáadva p_i kötőéleit, éppen egy *m* szögpontú G_m teljes részgráfot kapunk (lásd 2.1. ábra).



2.1. ábra

Bizonyítás (elégségesség)
Ha *G* tartalmaz *m* szögpontú teljes részgráfot, annak bármelyik szögpontja által generált részgráf éppen egy *G*-beli *m-1* szögpontú teljes részgráf (lásd 2.1. ábra).

Q.E.D.

MEGJEGYZÉSEK
1. A 2.1. tétel következményeként adódik, hogy ha létezik egy fenti tulajdonságú p_i szögpont, akkor legalább *m* ilyen szögpont létezik *G*-ben.

2. Ha *G*-ben nincs *m* szögpontú teljes részgráf, akkor *m*-nél nagyobb szögpontszámú sincs. Hiszen annak lenne *m* szögpontú teljes részgráfja.

3. Adott gráf maximális teljes részgráfjának megkeresésére, a 2.1. tételre épülő backtrack algoritmus szerinti programot mutat be a [4] dolgozat.

* * * * *

2.2. TÉTEL
A *G* multigráf akkor és csak akkor tartalmaz $m \leq n$ szögpontú teljes részgráfot, ha $\overline{G}$ -ben (*G* komplementere) létezik *m* független szögpont.

Bizonyítás (szükségesség)
Ha $\overline{G}$ tartalmaz *m* független szögpontot, akkor (2.4) szerint ezek *G*-ben *m* szögpontú teljes részgráfot alkotnak.

Bizonyítás (elégségesség)
Ha *G* tartalmaz *m* szögpontú teljes részgráfot, akkor a 2.2. definíció szerint az ebbe tartozó szögpontok $\overline{G}$ -ben egyáltalán nincsenek éllel összekötve, azaz *m* független szögponthalmazt alkotnak.

Q.E.D.

Adott gráf maximális teljes részgráfjának megkeresésére, a 2.2. tételre épülő backtrack algoritmus szerinti programot mutat be a [4] dolgozat.

Hivatkozás jegyzék

[1] Coen Bron-Joep Kerbosh: *Finding All Cliques of an Undirected Graph*, Communications of the ACM, Vol.16, No.9, 1973.

[2] LeRoy F. Johnson: *Determining Cliques of a Graph*, Proc. Fifth Manitoba Conference on Numerical Math., pp. 429-437, 1975.

[3] H.C. Johnston: *Cliques of a Graph-Variations on the Bron-Kerbosh Algorithm*, International Journal of Computer and Information Sciences, Vol.5, No.3, 1976.

[4] Szabó Imre: *Adott gráf teljes részgráfjaival kapcsolatos feladatok számítógépes megoldása*, Szakdolgozat, ELTE TTK Programozó matematikus szak, 1978. Konzulens: Dénes Tamás