Szükséges és elegendő feltétel Hamilton-út létezésére, bizonyos gráfosztályokban

Dénes Tamás, 1975.

Bevezetés

Hamilton-út létezésének problémájával több szerző foglalkozott eddig és igen jelentős eredményeknek bizonyultak azok az általános fokszám, illetve élszám feltételek, melyeket például az [1], [2], [4], [5] publikációk tartalmaznak. Ez irányú vizsgálatok /és eredmények/ azt mutatják, hogy az előbbiekben is említett gráfelemek segítségével csak elegendő feltételek nyerhetők, melyek például konkrét felhasználás esetén nem nyújtanak kellő biztonságot arra nézve, hogy egy adott gráf tartalmaz-e Hamilton-utat.

Mivel a gyakorlat igen lényegessé teszi a Hamilton-utak szerepét, így a fentiek miatt számos Hamilton-út kereső algoritmus megalkotására került sor /[3], [6], [7], [8] /, amelyek eleget tesznek a kívánt "biztonságos" információ kritériumnak, de igen nagy a munkaigényük. Ilyen megfontolásokból e cikkben olyan szükséges és elegendő feltételt fogalmaztunk meg, amely bár bizonyított szük gráfosztályokra pillanatnyilag, azonban egyszerü és számítógéppel könnyen kezelhető algoritmust is nyújt a Hamilton-utak létezésének megállapítására.

I. Jelölések

Jelen dolgozatban csak egyszerü, összefüggő, irányítatlan gráfokról lesz szó, így "gráf" alatt minden esetben ezt értjük.

Egy n szögpontú gráfot, melynek szögpontjai a $P_1, P_2, \dots, P_n$ pontok Γ_n -nel jelöljük.

A P_i szögpont fokszámát $f(P_i)$ jelöli és ha $f(P_i) = r$, akkor $P_{i1}, \dots, P_{ir}$ a P_i szögpont szomszédai.

Tekintsük az összes Γ_n gráfok halmazát, melyekben van Hamilton-út, e halmazt $\mathcal{A}(H)$-val fogjuk jelölni.

II. Minimál algoritmus

Az ismertetésre kerülő algoritmus egy Γ_n gráf tetszőleges szögpontjából kiinduló Hamilton-út keresésére szolgál.

1./ Tekintsük Γ_n tetszőleges szögpontját, mint kezdőpontot és jelöljük P_1 -gyel. Legyen P_1 fokszáma r és szomszédai közül a legkisebb fokszámú P_2 /ha ilyen több van, akkor azok bármelyike/, vagyis

$$f(P_2) = \min\left[f(P_{11}), f(P_{12}), \ldots, f(P_{1r})\right]$$

2./ Hagyjuk el Γ_n -ből a P_1 szögpontot és a hozzá tartozó éleket, így egy Γ_{n-1} $n-1$ szögpontú gráfhoz jutunk.

3./ Ezután ismételjük meg az 1./ lépést P_1 helyett P_2 -vel és legyen az így kapott szögpont P_3. Majd a 2./ lépést hajtsuk végre a Γ_{n-1} gráfon P_2 -vel, így egy Γ_{n-2} $n-2$ szögpontú gráfhoz jutunk, ... stb.

Ha az algoritmus 1./, 2./ lépései n -szer végrehajthatók, akkor a kapott $P_1, P_2, \ldots, P_n$ szögpontsorozat, az előállítás sorrendjében pontosan egy Γ_n -beli Hamilton-utat határoz meg.

A fent leírt algoritmust nevezzük minimál-algoritmusnak és az így nyert Hamilton-utat minimál-típusú Hamilton-útnak.

A rövidebb írásmód miatt a továbbiakban minimál-típusú Hamilton-út helyet M-Hamilton-utat írunk.

III. Hamilton-út és M-Hamilton-út

Megmutatjuk, hogy az M-Hamilton-út létezése nem következik a Hamilton-út létezéséből minden esetben, így szükséges annak vizsgálata, hogy milyen feltételek mellett létezik egy $\Gamma_n \in \mathcal{A}(H)$ gráfban M-Hamilton-út.

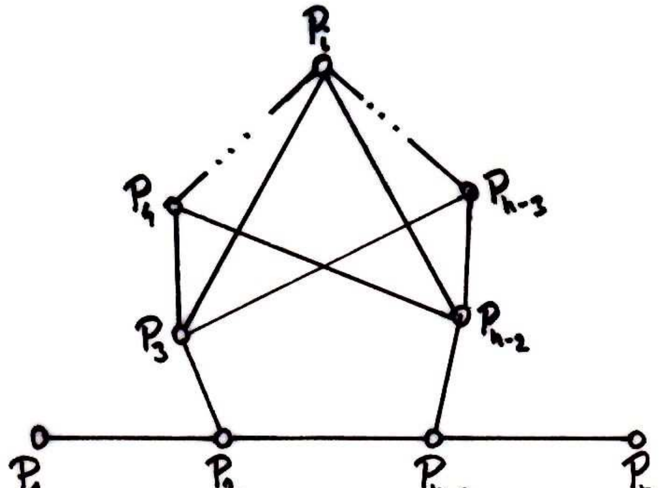
Tekintsünk egy $\Gamma_n \in \mathcal{A}(H)$ gráfot, melynek $P_1, P_2, \dots, P_n$ szögpontjai az indexezés szerinti sorrendben Hamilton-úttal bejárhatók, valamint teljesíti az alábbi négy feltételt. /lásd 1.ábra/

a./ $f(P_1) = f(P_n) = 1$

b./ $f(P_2) = f(P_{n-1}) = 3$

c./ $f(P_3) > 3$

d./ $f(P_{n-2}) > 3$



1. ábra

Állítás

Γ_n nem tartalmaz M-Hamilton-utat.

Bizonyítás

Bizonyítás nélkül közöljük az itt következő lemmát, melyet felhasználunk a későbbiekben .

1. Lemma

Tetszőleges $\Gamma_n \in \mathcal{A}(H)$gráf maximálisan két elsőfokú szögpontot tartalmazhat és ez/ek/ csak egy Γ_n-beli Hamilton-út kezdő, illetve végpontja lehet/nek/.

Visszatérve állításunkhoz, az 1. lemma szerint Γ_n-ben csak P_1 vagy P_n kezdőpontú Hamilton-út lehet.
A minimál-algoritmust P_1-nél kezdve P_2-be, majd $f(P_{n-1}) < f(P_3)$ miatt P_{n-1}-be és végül $f(P_n) < f(P_{n-2})$ miatt P_n -be. jutunk. Igy a $P_3, P_4, \ldots, P_{n-2}$ szögpontokat nem érintettük.
A P_n szögpontot tekintve kezdőpontnak hasonló eredményre jutunk, tehát Γ_n nem tartalmaz M-Hamilton-utat.

Ezzel állításunkat beláttuk.

IV. M-Hamilton-utat nem tartalmazó $\mathcal{A}(H)$-beli gráfokról

Jelöljük azon $\mathcal{A}(H)$-beli gráfok halmazát, melyekben nincs egy adott $H = (P_1 \dots P_n)$ Hamilton-úttal közös kezdőpontú M-Hamilton-út $\mathcal{A}_1(H)$-val.
Továbbá jelöljük azon $\mathcal{A}(H)$-beli gráfok halmazát, melyek egyáltalán nem tartalmaznak M-Hamilton-utat $\mathcal{A}_2(H)$-val.
/Ekkor nyílván $\mathcal{A}_2(H) \subset \mathcal{A}_1(H)$ teljesül./

Az $\mathcal{A}_1(H)$ halmazt felbontjuk három részhalmazra és megmutatjuk, hogy ez egy osztályozás $\mathcal{A}_1(H)$-n.

Legyen az $\mathcal{A}_1(H)$ halmaz három részhalmaza A,B,C és ezek elemei a 2.,3. és 4. ábra szerinti konstrukciójú gráfok. Az egyes részhalmazok elemeit a tartalmazó részhalmaz szerint A,B,C -tipusú gráfnak fogjuk nevezni.

Tekintsünk egy $\Gamma_n \in \mathcal{A}_1(H)$ gráfot és szögpontjait rendezzük egy Hamilton-útja szerint, melyet H-val jelölünk, H szeleteit pedig a $H_1, H_2, \dots$ jelekkel. A 2., 3., 4. ábrákon látható jelölések jelentése tehát a következő:

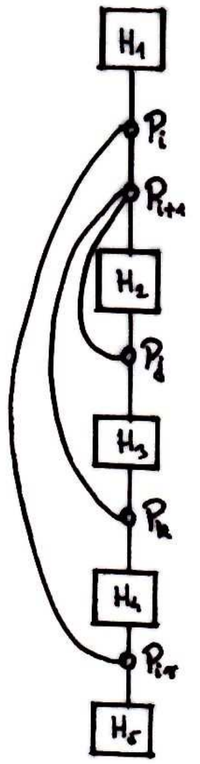
$H_1, H_2, \dots, H_r$ a H Hamilton-út szeletei, melyek közül egyesek esetleg üresek is lehetnek.

P_i az első olyan szögpont /P_1 -től kezdve a minimál-algoritmust/, melyre teljesül, hogy

$$(1) \qquad f(P_{i+1}) \neq \min\left[f(P_{i1}),\dots,f(P_{is})\right] \qquad (f(P_i)=s)$$

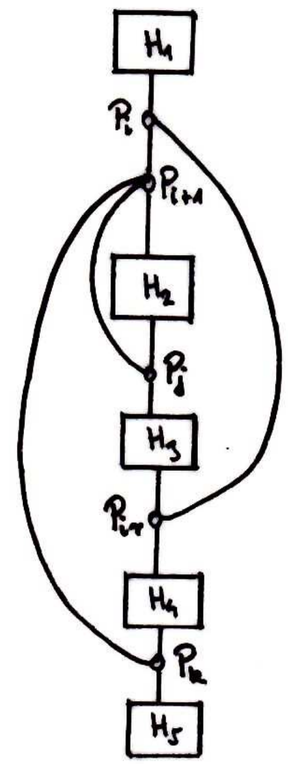
$$(2) \qquad f(P_{ir}) = \min\left[f(P_{i1}),\dots,f(P_{is})\right] \text{ ahol } 1 \le r \le s$$

P_j és P_k pedig a H szerinti szögpont-sorrendben a P_{i+1} szögpont első és utolsó nem H-hoz tartozó élekkel összekötött szomszédja.



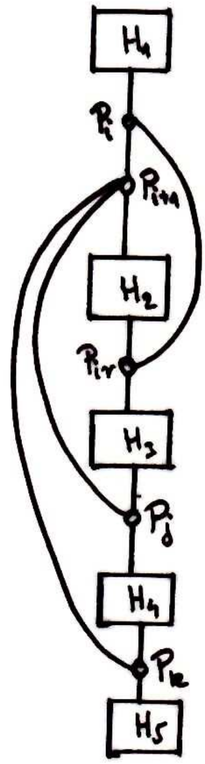
A-típus

2. ábra



B-típus

3. ábra



C-típus

4. ábra

1. TÉTEL

Legyen $\Gamma_n \in \mathcal{R}(H)$ és a $H=(P_1 \dots P_n)$ Γ_n-beli Hamilton-út P_1 szögpontjánál kezdve a minimál-algoritmust, P_i az első olyan szögpont, amely (1), (2) -nek eleget tesz.

Γ_n -ben akkor és csak akkor van P_1 kezdőpontú M-Hamilton-út, ha az így keletkező $\Gamma_{n-i} \subset \Gamma_n$ részgráf tartalmaz P_{i+1} kezdőpontú Hamilton-utat.

Bizonyítás

a./ Szükségesség

Mivel Γ_n -ben van P_1 kezdőpontú H_M M-Hamilton-út, így ennek $(P_1 P_2 \dots P_i P_{i+1})$ egy $i+1$ elemü szelete, ami azt jelenti, hogy H_M további elemei egy P_{i+1} kezdőpontú Γ_{n-i} -beli Hamilton-utat alkotnak.

b./ Elegendőség /Teljes indukció/

$m \leq 3$ -ra igaz az állítás.
Tegyükfel, hogy $m \leq n-1$ -re is igaz.
Ha van P_{i+1} kezdőpontú Γ_{n-i} -beli Hamilton-út, akkor az indukciós hipotézis miatt Γ_{n-i} -ben van P_{i+1} kezdőpontú M-Hamilton-út, legyen ez H_1. Ezt összekapcsolva a $P_1, \dots, P_i$ szögpontokkal, egy $H_M = (P_1 \dots P_i H_1)$ M-Hamilton-utat nyerünk, mivel a $P_1, P_2, \dots, P_{i-1}$ szögpontok esetén a minimál-algoritmust alkalmaztuk.

Ezzel tételünket beláttuk.

2. TÉTEL

Az $\mathcal{A}_1(H)$ halmaz A,B,C részhalmazokra bontása egy osztályozás $\mathcal{A}_1(H)$-n, vagyis

a./ $A \cup B \cup C = \mathcal{A}_1(H)$

b./ $A \cap B = A \cap C = B \cap C = \emptyset$

c./ $A \neq \emptyset$, $B \neq \emptyset$, $C \neq \emptyset$

Az a./ állítás bizonyítása /indirekt/

Tegyükfel, hogy

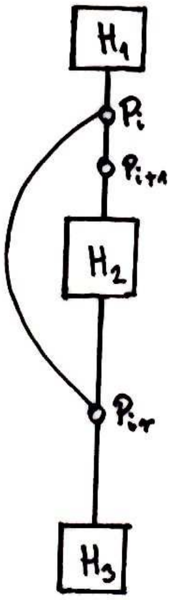
$$(3) \qquad \Gamma_n \in \mathcal{A}_1(H) \text{ és } \Gamma_n \notin A, \Gamma_n \notin B, \Gamma_n \notin C$$

Legyen H egy Γ_n-beli Hamilton-út és $P_i \in H$ az első olyan szögpont / P_1-től kezdve az algoritmust/, melyre az (1), (2) összefüggések teljesülnek és $i < n-2$.

Ekkor az (1) összefüggés értelmében létezik $P_{ir} \neq P_{i+1}$ szomszédja P_i-nek, melyre teljesül a (2) feltétel. /lásd 5. ábra/ Igy fennáll a

$$(4) \qquad f(P_{i+1}) \geq f(P_{ir}) + 1$$

összefüggés.



5. ábra

- Ha $H_3=\emptyset$, akkor Γ_{n-i} tartalmaz $H_1=(P_{i+r}H_2P_{i+1})$ Hamilton-utat, ami az 1. tétel szerint azt jelenti, hogy Γ_n-ben van P_1 kezdőpontú M-Hamilton-út és ez ellentmond (3)-nak.
- Ha $H_3\neq\emptyset$, akkor

(5) $$f(P_{i+r})\geq 3$$

így

(6) $$f(P_{i+1})\geq 4$$

ami azt jelenti /lásd 5. ábra/, hogy a P_{i+1} szögpontból a H-ba tartozó éleken kívül, még legalább két él indul ki. Ezeket az éleket az általuk összekötött szögpontok H-beli sorszáma szerint rendezve, az első és utolsó a 2., 3., 4. ábrák szerinti konfigurációt veheti fel.

Azaz Γ_n az A,B,C típusok valamelyikébe tartozik, ami ellentmond (3) -nak.

A b) és c) állítások bizonyítását nem részletezzükk, mivel azok a 2., 3. és 4. ábra, valamint a hozzáfűzött ismertetés alapján igen könnyen beláthatók.

Ezzel tételünk bizonyítását befejeztük.

V. M-Hamilton-útra vonatkozó tételek

Ebben a részben az $\mathcal{A}(H)\setminus\mathcal{A}_1(H)$ halmazzal fogunk foglalkozni, valamint megmutatjuk, hogy $n=8$ a legkisebb szögpontszámú eleme az $\mathcal{A}_2(H)$ halmaznak.

3. TÉTEL

Legyen $\Gamma_n \in \mathcal{A}(H)$ és

$$(7) \qquad f(P_l) \leq 3 \qquad l = 1, 2, \dots, n$$

akkor Γ_n mindig tartalmaz M-Hamilton-utat.

Bizonyítás /indirekt/

Tegyük fel, hogy

$$(8) \qquad \Gamma_n \in \mathcal{A}_1(H)$$

Ekkor a 2. tétel szerint Γ_n az A,B,C osztályok valamelyikébe tartozik. /lásd 2., 3., 4. ábra/

- Ha $P_{ir} \neq P_n$ akkor fennáll az (5) összefüggés, így $f(P_{i+1}) \geq 4$ ami ellentmond a (7) feltételnek.

- Ha $P_{ir} = P_n$ akkor Γ_{n-i} tartalmaz P_{ir} kezdőpontú Hamilton-utat /ilyen például az A osztályban: $(P_{ir} H_4 P_k H_3 P_j H_2 P_{i+1})$, a B osztályban: $(P_{ir} H_3 P_j H_2 P_{i+1})$, a C osztályban: $(P_{ir} H_2 P_{i+1})$/, ami az 1. tétel szerint azt jelenti, hogy Γ_n -ben van P_1 kezdőpontú Hamilton-út és ez ellentmond a (8) feltételnek.

Ezzel tételünk bizonyítást nyert.

4. TÉTEL

Legyen $\Gamma_n \in \mathcal{A}(H)$, ekkor $n \leq 6$ esetén $\Gamma_n \in \mathcal{A}(H) \setminus \mathcal{A}_1(H)$ /ahol $\mathcal{A}(H) \setminus \mathcal{A}_1(H)$ a halmazelméleti különbséget jelenti/

Bizonyítás /indirekt/

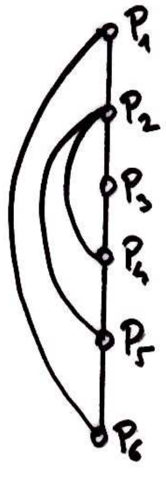
(9) Legyen $n \leq 6$ és $\Gamma_n \in \mathcal{A}_1(H)$

Ekkor Γ_n az A,B,C osztályok valamelyikébe tartozik.

Ahhoz, hogy Γ_n bármelyik osztály eleme legyen, szükséges, hogy $n \geq 5$ legyen, mivel az $i=1$ esetben is a P_i, P_{i+1}, P_j, P_k, P_{i_r}, szögpontokat tartalmaznia kell a gráfnak, így tételünk biztonyításához azt kell csak belátni, hogy $n=6$ esetén (9) nem állhat fenn.

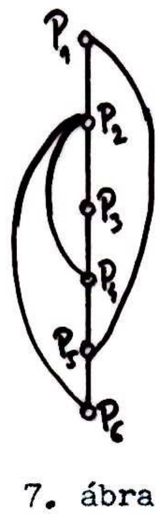
- Az A-osztályban $H_2 \neq \emptyset$,mivel ekkor P_{i+1} és P_j között többszörös élek lennének, ami nem megengedett.

Igy $n=6$ esetén a 6.ábra szerinti gráfszerkezet áll elő, melyben könnyen található $P_{i_r}=P_6$ kezdőpontú Γ_{n-1} -beli Hamilton-út, ami az 1. tétel miatt ellentmond a (9) feltételeknek.



6. ábra

- A B-osztályban szintén $H_2 \neq \emptyset$ az előbbi okok miatt, így a 7. ábrán látható gráfszerkezet áll elő, melyben könnyen találunk $P_{i_r} = P_5$ kezdőpontú Γ_{n-1} -beli Hamilton-utat és ez ellentmondáshoz vezet.



7. ábra

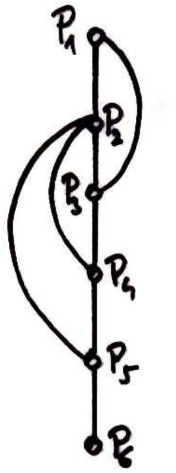
- A C-osztályban két eset lehetséges:

  a./ $H_5 = \emptyset$

  Ekkor a hatodik pontot a H_1, H_2, H_3, H_4, szeletek bármelyike tartalmazza, a $H_1=(P_{ir}\, H_2\, P_{i+1}\, P_k\, H_4\, P_j\, H_3)$ Hamilton-út megkonstruálható.

b./ $H_5 \neq \emptyset$

Ekkor a hatodik pontot H_5 tartalmazza, így a 8. ábra szerinti gráfkonstrukciót kapjuk, melyen látható a $P_{ir}=P_3$ kezdőpontú $H_2=(P_3\, P_2\, P_4\, P_5\, P_6)$ Hamiton-út.



8. ábra

Ez az 1. tétel értelmében ellentmond a (9) feltételnek.

Tehát tételünket bebizonyítottuk.

5. TÉTEL

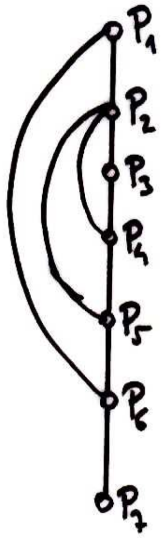
Legyen $\Gamma_n \in \mathcal{A}(H)$ és $n = 7$

ekkor $\Gamma_n \in \mathcal{A}_1(H) \iff \Gamma_n \in A$

Másképp megfogalmazva:

Ha $\Gamma_n \in \mathcal{A}_1(H) \Rightarrow n \geq 7$

A tétel bizonyítása a 4. tételéhez hasonló módon végezhető, így nem részletezzük. Egy gráfot azonban bemutatunk a 9. ábrán, melyre $n=7$ és $\Gamma_n \in A$.



9. ábra

Megjegyzések:

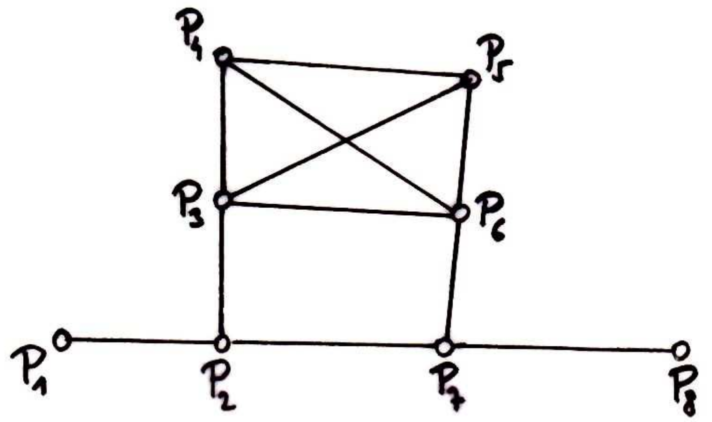
1./ Könnyen belátható, hogy $n=7$ esetén bármelyik $\Gamma_n \in A$ gráf tartalmazza a 9. ábra gráfját.

2./ Belátható, hogy a gráf tartalmaz P_7 kezdőpontú M-Hamilton-utat, vagyis az 1/ megjegyzést is figyelembevéve, $n=7$ esetén nincs olyan Γ_n melyre $\Gamma_n \in \mathcal{A}_2(H)$.

3./ Mivel $n=8$ -ra konstruálható olyan Γ_n, melyre $\Gamma_n \in \mathcal{A}_2(H)$ /lásd 10.ábra/, így érvényes az alábbi tétel:

6. TÉTEL

Legyen $\Gamma_n \in \mathcal{A}_2(H)$, ekkor $n \geq 8$



10. ábra

I R O D A L O M J E G Y Z É K

[1] Dirac G.A.: Some theorems on abstract graphs
Proc. London Math.Soc.,/3/ , 2/1952/,69-81

[2] Erdős P.: Remarks on a paper of Pósa
MTA Mat.Kut.Int.Közl. 7/1962/,A,227-229

[3] Kaufmann A.: Pontok, élek, ívek ... gráfok
Müszaki Kiadó, 1972.

[4] Nash Williams C.St.J.A.: Hamiltonian circuits in graphs and digraphs

[5] Pósa L.: A theoren concerning Hamilton lines
Magyar Tud.Akad.Mat.Kut.Int.Közl. 1962.

[6] Roberts S.M. and Flores Benito:
Systematic generation of Hamiltonian circuits
Comm. ACM 9,9/1966/ 690 - 694.

[7] Rubin F.: A search procedure for Hamilton paths and circuits
Journal of the Association for Computing Machinery, oktober 1974.

[8] Yan S.S.: Generation of all Hamiltonian circuits, paths, and centers of a graph, and related problems
IEEE Trans. Circuit Theor.14/1967/,79-81.