MAXIMÁLISAN HARMADFOKU CSUCSOT TARTALMAZÓ GRÁFOK HAMILTON - UTJAIRÓL

Dénes Tamás, 1975.

Jelölések

- A gráf szögpontjait $P_1, P_2, \ldots, P_n$ jelöli
- A szögpontok fokszámát $f(\ )$ jelöli, vagyis az i-edik szögpont fokszáma $f(P_i)$

Minimál algoritmus

Legyen Γ_n tetszőleges n szögpontu, egyszerü, összefüggő, nem irányitott gráf.

1. Tekintsük Γ_n egyik legkisebb fokszámú pontját, P_1. Legyen P_1 szomszédai közül $(P_{11}, P_{12}, \ldots P_{1r})$ a legkisebb fokszámú /ha ilyen több van, akkor azok egyike/ P_2.

$$(1)\quad f(P_2) = \min\left[f(P_{11}),\ f(P_{12}),\ \ldots,\ f(P_{1r})\right]$$

2. Hagyjuk el Γ_n-ből a P_1 szögpontot és a hozzá tartozó éleket, igy egy Γ_{n-1} n-1 szögpontú gráfhoz jutunk.
Ha Γ_{n-1} **összefüggő gráf,**
akkor P_2-vel végezzük el az 1. majd 2. lépést,
majd a P_3, P_4, ... szögpontokkal.

$$(2)\quad f(P_{i+1}) = \min\left[f(P_{i1}),\ f(P_{i2}),\ \ldots,\ f(P_{is})\right]$$

Igy n lépés után egy $P_1, P_2, \ldots, P_n$ szögpontsorozatot nyerünk,
mely Γ_n összes szögpontját egyszer és csak egyszer tartalmazza, valamint a szögpontsorozat bármely két szomszédos tagja éllel összekötött Γ_n-ben.
Tehát $P_1, P_2, \ldots, P_n$ egy Γ_n-beli Hamilton ut.
Nevezzük az igy nyert Hamilton-utat <u>minimál tipusúnak.</u>
(A továbbiakban: M-típusú)

<u>1. Lemma</u>

Ha egy Γ gráfban létezik Ham.-út, akkor legfeljebb két 1 fokszámú szögpontja lehet és ezek a Ham.- út kezdő és végpontjai.

<u>Bizonyitás :</u> Trivi

I. TÉTEL

Legyen Γ_n n-szögpontú, egyszerü, összefüggő, nem irányitott gráf, melyre max $f(P_i) = 3$ $(i = 1, 2, \ldots, n)$
Ha Γ_n-ben létezik Hamilton út, akkor létezik minimál tipusú.

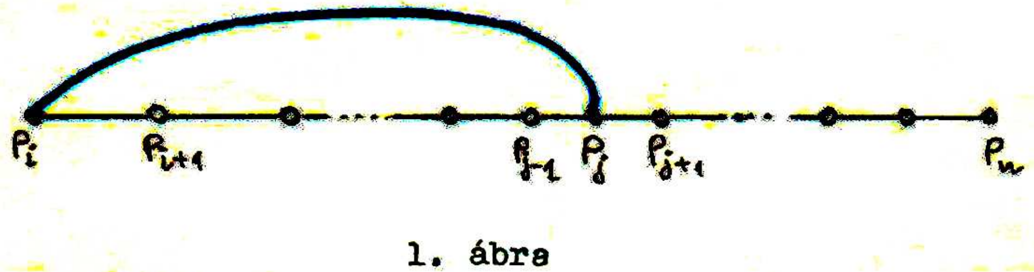
Bizonyitás

Legyen $H = (P_1, P_2, \ldots, P_n)$ Γ_n-beli Hamilton-út. Megmutatjuk, hogy H vagy minimál tipusú, vagy konstruálható belőle ilyen.
Kezdjük el a P_1 szögpontnál a minimál algoritmust alkalmazni és tegyük fel, hogy P_i az első olyan szögpont, melyre nem áll, hogy szomszédai közül P_{i+1} fokszáma a legkisebb.
Ekkor van olyan P_j $(j > i + 1)$ szomszédja P_i-nek, hogy

$$(2) \qquad f(P_j) < f(P_{i+1})$$

a./ Tegyük fel, hogy $j \neq n$
Ekkor P_j-nek szomszédja P_{j-1}, P_{j+1} és P_i, amelyek mind nem elhagyott szögpontok, tehát $f(P_j) = 3$

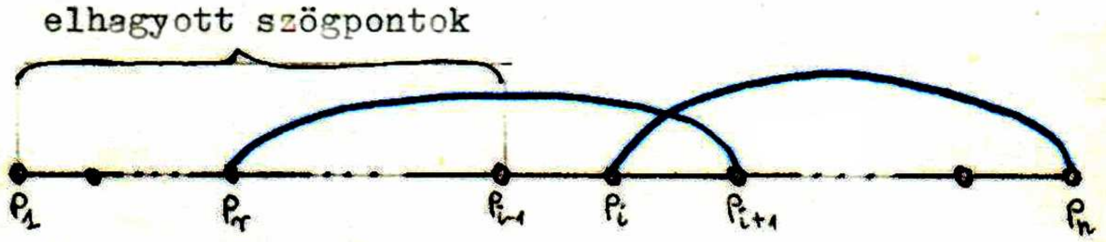
A tétel feltételei szerint azonban $f(P_{i+1}) \leq 3$ tehát (2) nem teljesülhet.
/lásd 1. ábra/.



1. ábra

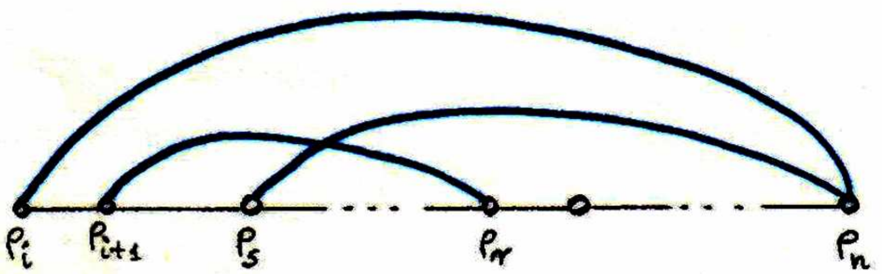
b./ Tegyük fel, hogy $j = n$ és P_{i+1} -nek van $r < i$ indexü szomszédja /lásd 2. ábra/
ekkor az i -nél kisebb indexü szögpontokat elhagyva
$f\left(P_{i+1}\right) = 2$

A P_n szögpont viszont legalább a P_{n-1} és P_i szögpontokkal össze van kötve, tehát
$2 \leq f\left(P_n\right) \leq 3$, vagyis (2) ebben az esetben sem teljesülhet.



2. ábra

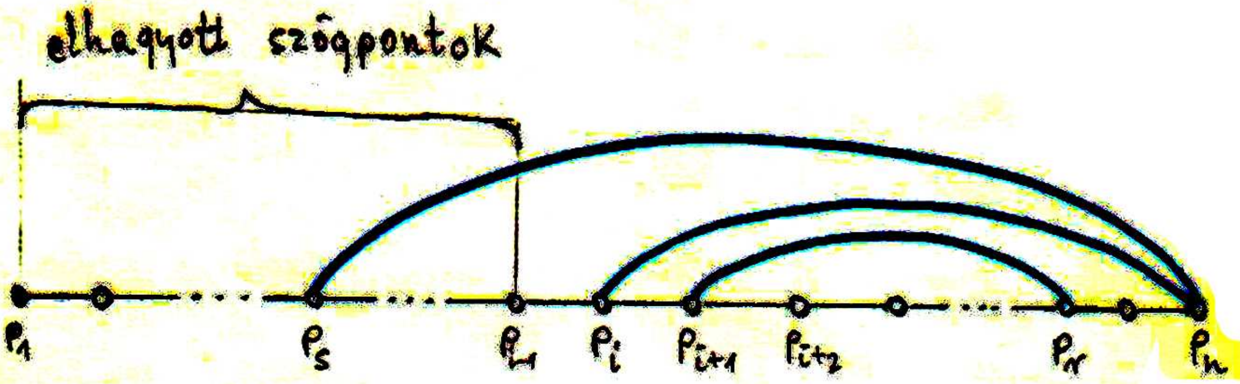
c./ Tegyük fel, hogy $j = n$ és P_{i+1}-nek a P_i és P_{i+2} szögpontokon kivül csak $r > i + 2$ indexü szomszédja van, valamint P_n -nek van $s \geq i + 1$ indexü szomszédja /előfordulhat, hogy $r = s$/./lásd 3. ábra/
Ekkor az i-nél kisebb indexü szögpontokat elhagyva
$f\left(P_{i+1}\right) = 3$ és $f\left(P_n\right) = 3$ vagyis (2) nem teljesülhet.



3. ábra

d./ Tegyük fel, hogy $j = n$ és P_{i+1} -re teljesül a c./ pontbeli feltétel, valamint P_n-nek csak $s < i$ indexü szomszédja van P_i és P_{n-1} kivételével./lásd 4. ábra/ Ekkor az i-nél kisebb indexü szögpontokat elhagyva $f\left(P_{i+1}\right) = 3$ és $f\left(P_n\right) = 2$, vagyis (2) teljesül. Ekkor azonban P_i elhagyása után P_n-et választva következő szögpontnak, minimál algoritmus .

folytatható a P_n , P_{n-1}, ..., P_{i+1} szögpontokat és a megmaradt éleket tartalmazó részgráfon. Minden további minimál algoritmusnak nem elegettevő szögpont esetén a d./ pont szerint folytatható az eljárás azzal az eltéréssel, hogy P_n helyett P_{i+1} fog szerepelni, hiszen az a./ b./ c./ esetekben mindig a soronkövetkező szögpont választható következőnek.



4. ábra

Ezzel az eljárással a H-ból minimál tipusú Hamilton-utat nyerünk.
Tehát a tételt bebizonyitottuk.

Megjegyzés:

1./ A fenti bizonyitásban természetesen $P_i \equiv P_1$ is fennállhat.

2./ Mivel feltettük, hogy a minimál-algoritmust P_1-nél kezdjük, a kapott M-tipusú Hamilton-út is P_1 kezdőpontú, tehát az I. tétel következő módositása igaz. /lásd II.TÉTEL/

3./ Mivel minimál tipusú Hamilton-út létezése esetén létezik Hamilton-út, igy nyerjük a következő tételt. /lásd III.TÉTEL/

II. TÉTEL

Legyen Γ_n n-szögpontú, egyszerü, összefüggő, irányitatlan gráf, melyre max $f(P_i) = 3$ $(i = 1, 2, \dots, n)$

Ha Γ_n -ben létezik Hamilton-út (H), akkor létezik M-tipusú Hamilton-út is, melynek kezdőpontja azonos H kezdőpontjával.

III. TÉTEL

A II. tétel feltételei mellett Γ_n-ben akkor és csak akkor létezik Hamilton-út, ha létezik M-tipusú Hamilton-út.

IV. TÉTEL

Tetszőleges Γ_n -beli $H = (P_1, P_2, \dots, P_n)$ minimál-tipusú Hamilton-út invariáns a gráf egy

$$(1) \qquad 1 \leq m < \max f(P_i) - \min f(P_i)$$

faktorának elhagyásával szemben , mely nem tartalmaz H-val közös élt.

Bizonyitás:

Hagyjuk el Γ_n -ből a fenti tipusú m faktor. Ekkor egy

Γ_n' részgráfot kapunk, melyben

$$(2) \qquad [f(P_i)]' = f(P_i) - m$$

Igy egy tetszőleges $P_i \in \Gamma_n'$ szögpont esetén, melynek szomszédai $P_{i1}, P_{i2}, \dots, P_{ir}$ $(i = 1, 2, \dots, n)$
$(r \leq n-1)$

$$(3) \qquad \Gamma_n\text{-ben} \quad f(P_{ij}) = \min[f(P_{i1}), \dots, f(P_{ir})]$$

$$(4) \qquad \Gamma_n'\text{-ben} \quad f(P_{ik}) = \min[f(P_{i1}) - m, \dots, f(P_{ir}) - m]$$

Vagyis $P_{ij} \equiv P_{ik}$ amit bizonyitani akartunk.

- Legyen $\Pi = (k_1, k_2, \dots, k_p)$ a $k-3$ szám tetszőleges particiója, vagyis

$$(5) \qquad k - 3 = k_1 + k_2 + \dots + k_p$$

- Legyen Γ_n n szögpontú, egyszerü, összefüggő gráf, melyre

$$(6) \qquad \max f(P_i) = k \quad \text{és} \quad \min f(P_i) = k-2$$

V. TÉTEL

Ha Γ_n -ben létezik $H = (P_1, \dots, P_n)$ Hamilton-út és létezik $k_1, k_2, \dots, k_p$ H-tól és egymástól élidegen faktor, akkor Γ_n-ben létezik minimál tipusú Hamilton-út.

Bizonyitás:

Hagyjuk el Γ_n-ből a feltételekben emlitett k_1-faktort, ekkor egy $\Gamma_n^1 \subset \Gamma_n$ részgráfhoz jutunk, amely tartalmazza H-t és a III. tétel miatt a minimál tipusú Hamilton-utak /ha ilyenek vannak/ azonosak a Γ_n -beliekkel.

Ezután hagyjuk el rendre a $k_2, k_3, \dots, k_p$ faktorokat, igy egy $\Gamma_n^p \subset \Gamma_n$ részgráfhoz jutunk, melyben

$$(7) \qquad \max f(P_i) = 3 \quad \text{és} \quad \min f(P_i) = 1$$

hiszen a faktorok elhagyásával minden szögpont fokszáma $k-3$-mal csökkent.
A jelen tétel feltételei miatt Γ_n^p tartalmazza H-t és a III. tétel miatt a Γ_n-beli minimál tipusú Hamilton-utakat, tehát teljesülnek az I. tétel teljesüléséhez szükséges feltételek, vagyis Γ_n-ben létezik minimál tipusú Hamilton-út.

Megjegyzés:

1./ A Π partició természetesen tartalmazhat azonos tagokat is, vagyis előfordulhat, hogy

$$(8) \qquad k_i = k_j \qquad (i \neq j,\ 1 \le i, j \le p)$$

2./ Π nem egyértelmü, tehát a faktorfelbontás sem.

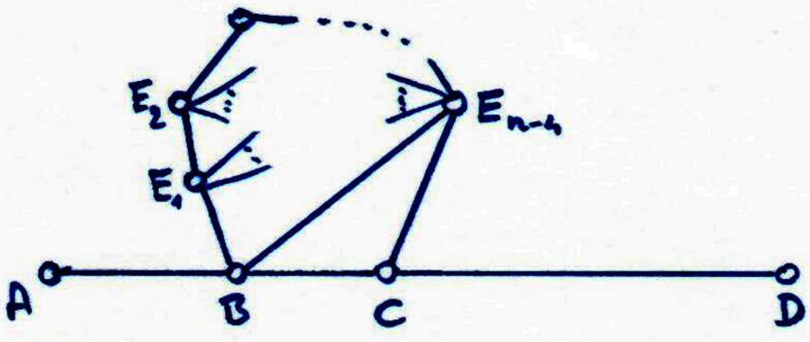
3./ Π tetszőleges tagja lehet 2, ami egy Hamilton-körnek felel meg, vagyis Γ_n-ből a Hamilton-körök elhagyhatók úgy, hogy a minimál-tipusú Hamilton-utak nem változnak.

Megjegyzés M-tipusú Hamilton-út létezésének problémájáról

Felvetődhet a kérdés, hogy érdemes-e vizsgálni minimál-tipusú Hamilton-utak létezésének feltételeit. Nem teljesül-e, hogy ha egy gráfban van Hamilton-út, akkor M-tipusú is van? A válasz nem, és mutatunk olyan gráfkonstrukciót, amely ezt igazolja.

Alapkonstrukció:

Tekintsük azon Γ_n n szögpontú, egyszerü összefüggő gráfokat, melyekre teljesülnek a következő feltételek. /A jelölések az 5. ábrán követhetők./



5. ábra

α) pontosan két egy-fokszámú szögpontja van. (A, D)

β) $f(E_1) \geq 4$

γ) $f(E_{n-4}) \geq 5$

δ) $E_1, E_2, \ldots, E_{n-4}, B$ kört alkotnak.

__Állitás:__

A fenti négy feltételnek elegettevő Γ_n gráfokban nincs M-tipusú Hamilton-út.

__Bizonyitás:__

Az 1. lemmának a fenti konstrukció eleget tesz és létezik Γ_n-ben Hamilton-út is, tehát a kezdőpont csak A vagy D lehet.

Egy A ill. D kezdőpontú Hamilton-út például

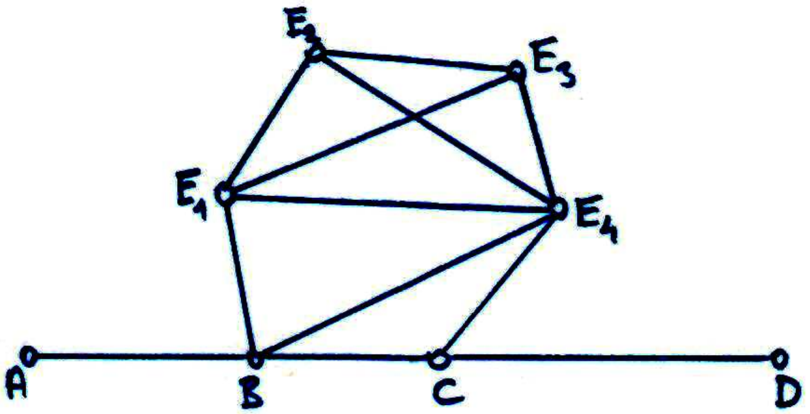
$H_1 = (A, B, E_1, \ldots, E_{n-4}, C, D)$

$H_2 = (D, C, E_{n-4}, \ldots, E_1, B, A)$

Tegyükfel, hogy a minimál algoritmust az A szögpontban kezdjük. Ezután egyértelmüen B-be jutunk, ahol keressük $\min(f(E_1), f(E_{n-4}), f(C))$ értékét. Mivel $f(C)=3$, igy a β, γ feltételeket figyelembevéve a C szögpontba jutunk.

Mivel $f(E_{n-1})$ csak eggyel csökkent, igy a γ feltételt tekintve $f(E_{n-1}) < f(D)$, tehát a D pontba jutunk, ami szükségképpen az út végpontja.
A D pontból indulva hasonló módon jutunk A-ba, amivel az állitást bebizonyitottuk.

A 6. ábra egy konkrét Γ_8 gráfot ábrázol, melyben nincs M-tipusú Hamilton-út.



6. ábra

VI. TÉTEL

Legyen Γ_5 öt szögpontú egyszerü, összefüggő, irányitatlan gráf.
Ha Γ_5 -ben van Hamilton-út, akkor van M-tipusú is.

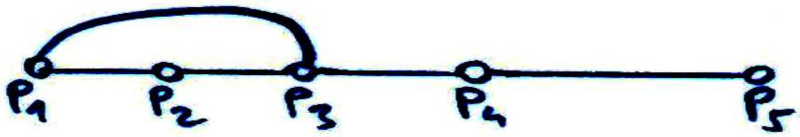
Bizonyitás:

Legyen $H=(P_1, P_2, \dots, P_5)$ Γ_5 egy Hamilton-útja. Kezdjük el a minimál-algoritmust a P_1 szögpontban. Az első lépés után (P_1 elhagyása) egy Γ_4 négyszögpontú egyszerü gráfhoz jutunk. Tételünk bizonyitásához a II. tétel értelmében azt kell belátni, hogy P_1 bármely szomszédja esetén, melyre

$$(8) \qquad P_i = \min\left(f(P_{11}), \dots, f(P_{1r})\right) \qquad \begin{matrix}(1<r\leq 5)\\(1<i\leq 5)\end{matrix}$$

van Γ_4 -ben P_i kezdőpontú Hamilton-út.

i = 2 esetén $H(P_2 P_3 P_4 P_5)$ szelete pontosan egy P_2 kezdőpontú Γ_4 -beli Hamilton-út, /lásd 7.ábra/ valamint Γ_4 -ben



7. ábra

max $f(P_i) = 3$ tehát igaz a II. tétel.

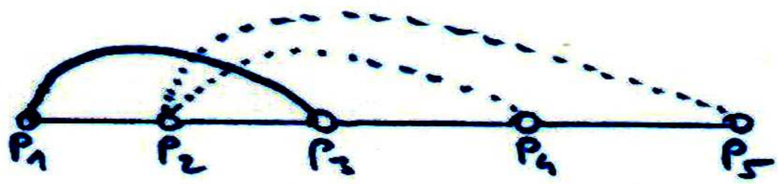
i = 3 esetén (8)-at figyelembevéve

$$f(P_2) > f(P_3) \tag{9}$$

ekkor azonban

$$f(P_2) = 4 \tag{10}$$

vagyis a 8. ábrán látható fokszámviszonyok minimálisan fennállnak.



8. ábra

Igy a minimál-algoritmus első lépése után P_3 -ba jutva a keletkező Γ_4 részgráfban van P_3 kezdőpontú Hamilton-út. pl. $H = (P_3 P_2 P_4 P_5)$ igy ebben az esetben is érvényes a II. tétel.

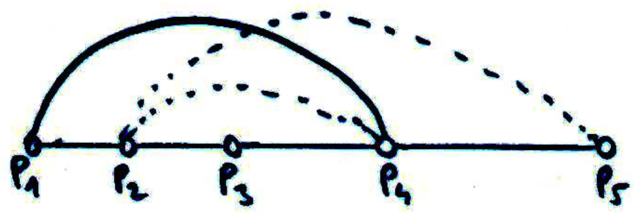
i = 4 esetén

$$f(P_2) > f(P_4) \tag{11}$$

Mivel azonban min $f(P_4) = 3$, igy csak az $f(P_2) = 4$ állhat fenn, ami azt jelenti, hogy P_2 -nek minden szögpont szomszédja, amiből következik, hogy

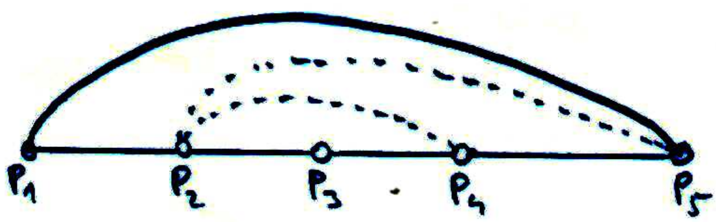
(12) $\qquad f(P_4) = 4$

és ez ellentmond (11)-nek, vagyis ez az eset nem fordulhat elő. /lásd 9.ábra/



9. ábra

i = 5 esetén a P_1 szögpont elhagyása után keletkező Γ_4 -ben a $H=(P_5 P_4 P_3 P_2)$ P_5 kezdőpontú Hamilton-út, tehát itt is érvényes a II. tétel. /lásd 10. ábra/
Ezzel tételünk bizonyitását befejeztük.



10. ábra

VII. TÉTEL

Legyen Γ_n n szögpontú egyszerü, összefüggő irányitatlan gráf, melyben létezik $H=(P_1 P_2 \dots P_n)$ Hamilton-út.

A P_1 szögpontnál kezdve a minimál-algoritmust, legyen P_i az első olyan szögpont, melyre

$$(13) \quad f(P_{i+1}) \neq \min\left(f(P_{i1}), \dots, f(P_{ir})\right) \quad (1 \leq r \leq n-i)$$

$$(14) \quad f(P_s) = \min\left(f(P_{i1}), \dots, f(P_{ir})\right) \quad \begin{matrix}(s \neq i+1) \\ (1 \leq s \leq n-i)\end{matrix}$$

Ha az igy keletkező Γ_{n-i} részgráfban van P_s kezdőpontú Hamilton-út, akkor Γ_n -ben van M-tipusú is, melynek kezdőpontja P_1. (oda-vissza érvényes. "$\Leftrightarrow$")

Bizonyitás: (telj.ind.)

n ≤ 5 esetén az előző tételek alapján igaz a fenti állitás.
Tegyükfel, hogy m $\leq$ n - 1 esetén is igaz.
Ha van a fent leirt P_s szögpontból kiinduló Γ_{n-i} -beli Hamilton-út, akkor erre n - i $\leq$ n - 1 miatt igaz az indukciós feltétel, ami azt jelenti, hogy Γ_{n-i} -ben van M-tipusú P_s kezdőpontú Hamilton-út. Legyen ez H_m.

Ezt összekapcsolva $P_1, \dots, P_i$ -vel egy $H_M = (P_1 P_2 \dots P_i H_m)$ M-tipusú Γ_n -beli Hamilton-utat nyerünk. Ezzel tételünk bizonyitását befejeztük.

Következmény:

Tetszőleges Γ_n esetén elég az i = 1 esetet vizsgálni, hiszen az i = 2 esetben már érvényes az indukciós feltétel, tehát van M-tipusú Hamilton-út Γ_n -ben.

VIII. TÉTEL

Legyen Γ_6 tetszőleges 6 szögpontú egyszerü, összefüggő irányitatlan gráf.
Ha Γ_6 -ban van $H=(P_1 P_2 \cdots P_6)$ Hamilton-út, akkor van P_1 kezdőpontú M-tipusú Hamilton-út.

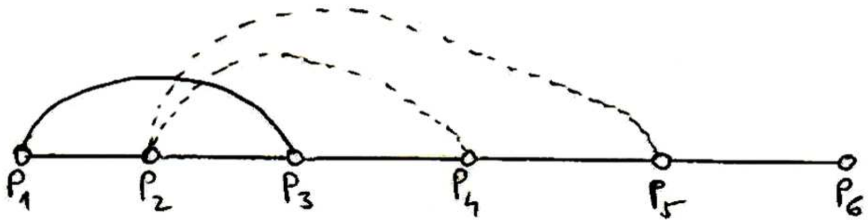
Bizonyitás:

A VII. tétel következménye miatt elég megvizsgálni P_1 lehetséges minimális fokszámú szomszédait.

- Tegyükfel, hogy

$$(15) \qquad \min\left(f(P_{11}),\ldots,f(P_{1r})\right)=P_3 \qquad (1<r\leq 5)$$

Ekkor P_2-nek P_4 és P_6 közül legalább az egyik szomszédja, /lásd 11. ábra/ mivel $f(P_2)>f(P_3)$



11. ábra

Igy a P_1 elhagyása után keletkező Γ_5 részgráfnak biztosan lesz P_3 kezdőpontú Hamilton-útja, vagy $H_1=(P_3 P_2 P_4 P_5 P_6)$ vagy $H_2=(P_3 P_2 P_6 P_5 P_4)$. Tehát Γ_5 -re érvényes a VI.tétel.

- Tegyükfel, hogy

$$(16) \qquad \min\left(f(P_{11}),\ldots,f(P_{1r})\right)=P_4 \qquad (1<r\leq 5)$$

Ekkor a Γ_6 gráfnak részgráfja lesz a 12. ábrán látható gráf, hiszen az $f(P_2)>f(P_4)$ egyenlőtlenségnek teljesülnie kell.

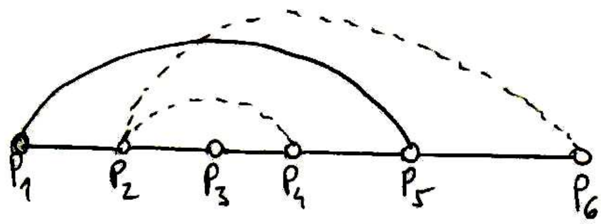
12. ábra

A P_1 elhagyása után keletkező Γ_5 részgráfnak van P_4 kezdőpontú Hamilton-útja, pl. $H_3=(P_4 P_3 P_2 P_5 P_6)$ tehát a VI. tétel érvényes.

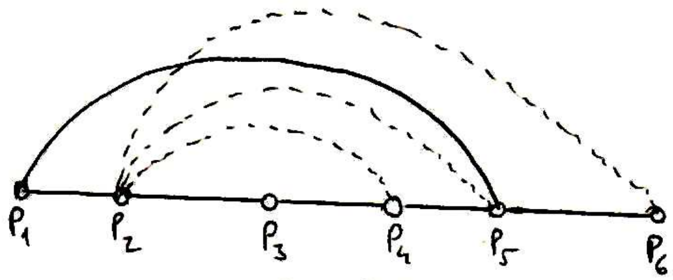
- Tegyükfel, hogy

$$(17) \qquad \min(f(P_{11}),\dots,f(P_{1r}))=P_5 \qquad (1<r\leq 5)$$

Ekkor P_2-nek biztosan szomszédja P_6, mivel az $f(P_2)>f(P_5)$ egyenlőtlenséget csak a 13. vagy 14. ábrán látható részgráfot tartalmazó Γ_6 gráfok elégitik ki.



13. ábra



14. ábra

Ebben az esetben a P_1 elhagyása után keletkező Γ_5 részgráfnak van P_5 kezdőpontú Hamilton-útja, pl. $H_4=(P_5 P_6 P_2 P_3 P_4)$ Tehát érvényes a VI. tétel.

- Tegyükfel, hogy

$$(18) \qquad \min(f(P_{11}),\dots,f(P_{1r}))=P_6 \qquad (1<r\leq 5)$$

Ekkor a P_1 elhagyása után keletkező Γ_5 részgráfnak biztosan P_6 kezdőpontú Hamilton-útja a $H_5=(P_6 P_5 P_4 P_3 P_2)$ ut, tehát itt is érvényes a VI. tétel.

Ezzel tételünk bizonyitást nyert.

IX. TÉTEL

Legyen Γ_7 hét szögpontú egyszerü, összefüggő irányitatlan gráf.
Ha Γ_7 -ben van Hamilton-út, akkor van M-tipusú is.

Bizonyitás:

Ha $H=(P_1 \ldots P_7)$ egy Γ_7 -beli Hamilton-út, akkor a VII. tétel következményét figyelembevéve e tétel bizonyitásánál is elég a P_1 lehetséges minimális fokszámú szomszédait vizsgálni. Igy a következő esetek lehetségesek.

$$(19)\qquad \min(f(P_{11}),\ldots,f(P_{1r}))=P_2 \qquad (1<r\le 6)$$

$$(20)\qquad \min(f(P_{11}),\ldots,f(P_{1r}))=P_3 \qquad (1<r\le 6)$$

$$(21)\qquad \min(f(P_{11}),\ldots,f(P_{1r}))=P_4 \qquad (1<r\le 6)$$

$$(22)\qquad \min(f(P_{11}),\ldots,f(P_{1r}))=P_5 \qquad (1<r\le 6)$$

$$(23)\qquad \min(f(P_{11}),\ldots,f(P_{1r}))=P_6 \qquad (1<r\le 6)$$

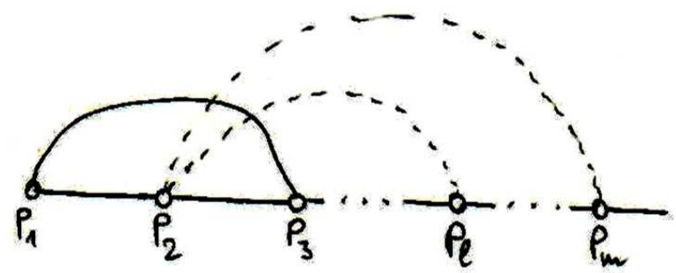
$$(24)\qquad \min(f(P_{11}),\ldots,f(P_{1r}))=P_7 \qquad (1<r\le 6)$$

A (19).(24) esetekben készen vagyunk, hiszen a P_1 elhagyása után keletkező Γ_6 részgráfban van P_2 illetve P_7 kezdőpontú Hamilton-út, pl. $H_1=(P_2 P_3 P_4 P_5 P_6 P_7)$ $H_2=(P_7 P_6 P_5 P_4 P_3 P_2)$, igy igaz a VIII. tétel.
A többi esetben fenn kell, hogy álljon az aktuális, minimális fokszámú P_1 -el szomszédos szögpontra (jelöljük P_i -vel)

$$(25)\qquad f(P_i) < f(P_2)$$

- A (20) esetben vizsgálandó, hogy a P_1 elhagyásával keletkező Γ_6 részgráf tartalmaz-e P_3 kezdőpontú Hamilton-utat. Itt P_3 fokszáma minimálisan három, igy (25) miatt $f(P_2)$ minimum négy, tehát a P_4, P_5, P_6, P_7 szögpontok közül legalább kettő szomszédja.
Tegyük fel, hogy csak két szomszédja van a fenti szög-

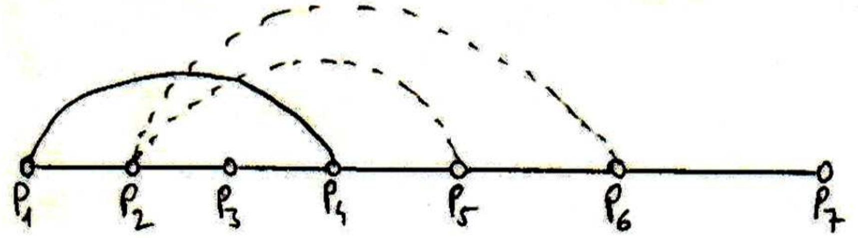
pontok közül P_l és P_m ahol $4 \leq l \leq 6$ és $5 \leq m \leq 7$ /lásd 15. ábra/



15. ábra

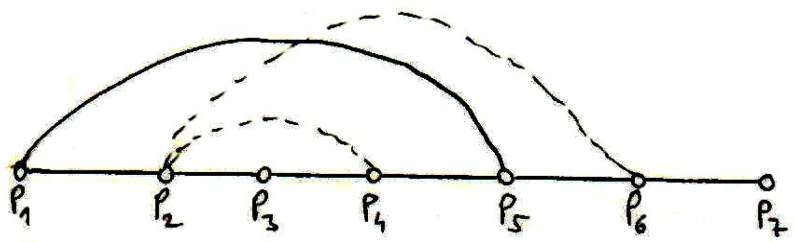
Ha $l=4$, akkor m bármilyen értéke mellett /a fenti korlátok között/ adódik a $H_1=(P_3 P_2 P_4 P_5 P_6 P_7)$, ha viszont $m=7$, akkor l tetszőleges értéke mellett adódik a $H_2=(P_3 P_2 P_7 P_6 P_5 P_4)$ Hamilton-út, melyek P_3 kezdőpontúak, tehát érvényes a VIII. tétel. Igy tehát csak az $l=5$, $m=6$ esetet kell vizsgálnunk, amikor a $H_3=(P_3 P_4 P_5 P_2 P_6 P_7)$ Hamilton-út adódik, ami szintén eleget tesz a feltételeknek.

- A (21) esetben (25) miatt P_2-nek P_5 és P_7 közül legalább az egyik szomszédja, /lásd 16. ábra/ igy mindenképpen megkonstruálható vagy a $H_4=(P_4 P_3 P_2 P_5 P_6 P_7)$ vagy a $H_5=(P_4 P_3 P_2 P_7 P_6 P_5)$ P_4 kezdőpontú Hamilton-út, vagyis a VIII. tétel itt is alkalmazható.



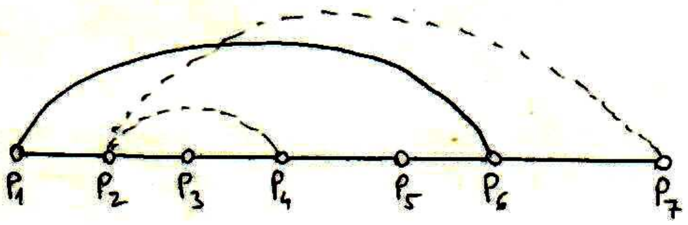
16. ábra

- A (22) esetben (25) miatt P_2 -nek P_6 és P_7 közül legalább az egyik szomszédja, így mindenképpen megkonstruálható vagy a $H_1=(P_5P_4P_3P_2P_6P_7)$, vagy a $H_2=(P_5P_4P_3P_2P_7P_6)$ P_5 kezdőpontú Hamilton-út,/lásd 17. ábra/ így a VIII. tétel itt is alkalmazható.



17. ábra

- A (23) esetben, ha P_2 -nek szomszédja P_7 /lásd 18. ábra/, akkor mindenképpen megkonstruálható a $H_1=(P_6P_7P_2P_3P_4P_5)$ Hamilton-út, így a VIII. tétel alkalmazható.

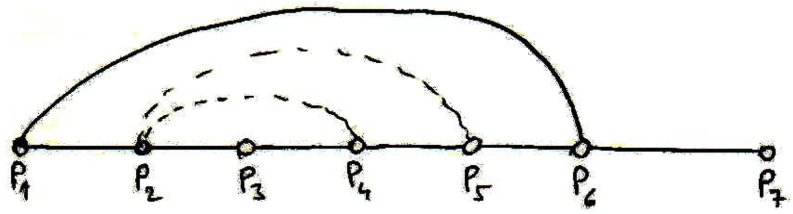


18. ábra

Most tegyükfel, hogy

(26) P_2 -nek nem szomszédja P_7

Ekkor csak P_4 és P_5 lehetnek P_2 szomszédai, /lásd 19. ábra/



19. ábra

valamint $f(P_6) \not> 3$, mivel $f(P_6) > 3$ esetén $f(P_2) > 4$ igy P_2 -nek szükségszerüen szomszédja lenne P_7 , ami ellentmond (26)-nak.

Tegyükfel, hogy

$$(27) \qquad \min\left(f(P_{71}), \dots, f(P_{7s})\right) \neq f(P_6) \qquad (1 \le s \le 6)$$

ekkor

$$(28) \qquad \min\left(f(P_{71}), \dots, f(P_{7s})\right) \ge 4 \qquad (1 \le s \le 6)$$

mivel hárommál alacsonyabb fokszámú szomszédja nem lehet P_7 -nek /lásd 19. ábra/
(27)-ből és (28)-ból azonban az következne, hogy $f(P_6) > 4$ ekkor viszont (25) miatt $f(P_2) > 5$, ami azt jelentené, hogy P_2 -nek szomszédja P_7 és ez (26)-nak ellentmond.
Igy beláttuk, hogy

$$(29) \qquad \min\left(f(P_{71}), \dots, f(P_{7s})\right) = f(P_6) \qquad (1 \le s \le 6)$$

tehát a (23) esetben P_1 helyett a P_7 szögpontot tekintve kezdőpontnak, a minimál-algoritmus első lépésében P_6-ba jutunk és az igy keletkező Γ_6 részgráfban a $H_1 = (P_6 P_5 P_4 P_3 P_2 P_1)$ P_6 kezdőpontú Hamilton-út, ezért itt is alkalmazható a VIII. tétel.
Ezzel tételünket bebizonyitottuk.

Most megadjuk a legkisebb n számot, melyre Γ_n tartalmaz Hamilton-utat, de M-tipusú Hamilton-utat nem.

X. TÉTEL

Legyen Γ_n n szögpontú, egyszerü, összefüggő irányitatlan gráf.
A legkisebb természetes szám, melyre Γ_n tartalmaz Hamilton-utat, de M-tipusú Hamilton-utat nem, $n=8$.

Bizonyitás:
A 6. ábrán bemutatott és ott leirt gráf ilyen, és az I., VI., VIII., IX. tételek biztositják, hogy ilyen tulajdonságú n nincs kisebb.

XI. Tétel

Legyen Γ_n n szögpontú, irányitatlan teljes gráf.

Γ_n-ben minden Hamilton-út M-tipusú.

Bizonyitás:

Könnyen belátható a teljes gráfokra vonatkozó következő két állitás:

α) Bármely n szögpontú teljes gráfból elhagyunk egy szögpontot /a hozzá tartozó élekkel együtt/, egy $n-1$ szögpontú teljes gráfot nyerünk.

β) Egy n szögpontú teljes gráf mindegyik szögpontjából kiindul legalább egy Hamilton-út.

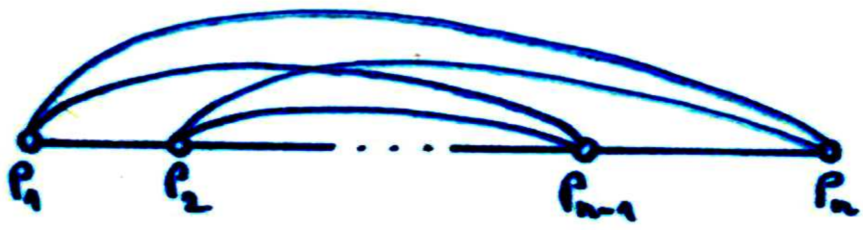
A tételt teljes indukcióval bizonyitjuk. $n \leq 3$ esetén a tétel igaz. /lásd 20. ábra a,b,c/

a. b. c.

20.ábra

Tegyük fel, hogy $m \leq n-1$ esetén a tétel igaz. Tekintsük Γ_n egy tetszőleges szögpontjából kiinduló, tetszőleges Hamilton-útját. (Ilyen van β) szerint)

Legyen ez a Hamilton-út $H = (P_1 P_2 \cdots P_n)$ /lásd 21.ábra/



21. ábra

Mivel p_1 bármelyik szomszédja $n-1$ -edfokú, igy a minimál-algoritmus szerint p_2-t is választhatjuk következő szögpontnak. Azonban p_1 elhagyása után α) szerint egy $n-1$ szögpontú teljes gráfot kapunk, melyre igaz β) és igy teljesül az indukciós feltétel, amiből következik, hogy H M-tipusú.