Ikerprím alapú Mersenne-ikerprímek tulajdonságai

Dénes Tamás matematikus

Budapest, 2001.

Abstract

Jelen dolgozatban megmutatjuk, hogy nincs két szomszédos Mersenne-prím amely ikerprím lenne. Majd definiáljuk az ikerprím párra épülő Mersenne-ikerprímeket és megvizsgáljuk ezek alapvető tulajdonságait.

A [Dénes 2001c]-ben bizonyított 2. tétel szerint, ha $p>3$ prímszám és $M_p=2^p-1$ Mersenne-prím, akkor igaz az alábbi (1) és (2) összefüggés.

(1) $$p=6k-1 \ (k=1,2,3,\ldots) \ \Rightarrow M_p = \left(6\sum_{i=0}^{3k-2} 4^i\right)+1$$

(2) $$p=6k+1 \ (k=1,2,3,\ldots) \ \Rightarrow M_p = \left(6\sum_{i=0}^{3k-1} 4^i\right)+1$$

Használjuk fel a következő ismert azonosságot:

(3) $$a^n-1=(a-1)(a^{n-1}+a^{n-2}+a^{n-3}+\ldots+a^1+a^0)=(a-1)\sum_{i=0}^{n-1} a^i \ \Rightarrow \sum_{i=0}^{n-1} a^i = \frac{a^n-1}{a-1}$$

és vezessük be a (4), (5) jelöléseket.

(4) $$m^-(k)=\sum_{i=0}^{3k-2} 4^i \overset{(3)}{=} \frac{4^{3k-1}-1}{3} \quad (k=1,2,3,\ldots)$$

(5) $$m^+(k)=\sum_{i=0}^{3k-1} 4^i \overset{(3)}{=} \frac{4^{3k}-1}{3} \quad (k=1,2,3,\ldots)$$

A [Dénes 2001c]-ben bizonyított 1. tétel szerint ha M_p Mersenne-prím, akkor mindig $6K+1$ alakú (K term.szám). Az ikerprímekről viszont tudjuk, hogy ha p és $p+2$ ikerprím, akkor $p=6k-1$ és $p+2=6k+1$ alakú (k term.szám), tehát két Mersenne-prím soha nem lehet ikerprím.

Vizsgálhatjuk azonban a p, $p+2$ ikerprímekhez tartozó M_p, M_{p+2} egymásutáni Mersenne-számokat.

1. DEFINÍCIÓ (*Mersenne-ikerprím*)
Legyenek M_p, M_{p+2} a $p>3$, $p+2$ ikerprímekhez tartozó Mersenne-számok. Ha $M_p=2^p-1$ és $M_{p+2}=2^{p+2}-1$ prímszámok, akkor *p, p+2* alapú *Mersenne-ikerprímeknek* nevezzük.

----- . -----

Az 1. definícióból adódik a *p, p+2* alapú *Mersenne-ikerprímekre* a következő:

(6) $$p=6k-1,\ p+2=6k+1\ (k=1,2,3,\ldots)\ \Rightarrow\ M_p=2^{6k-1}-1,\quad M_{p+2}=2^{6k+1}-1$$

(7) $$M_{p+2}-M_p=2^{6k+1}-2^{6k-1}=3\cdot 2^{6k-1}=3(M_p+1)\ \Rightarrow\ M_{p+2}=4M_p+3$$

A *Mersenne-ikerprímekre* vonatkozó (7) eredményt demonstrálják az 1. táblázat 1.-2., 5.-6. és 19.-20. sorai. Természetesen az egymás utáni Mersenne-számokra levezetett (7) összefüggés minden esetben érvényes, ha $k^-=k^+=k$ (az 1. táblázat jelöléseit használva), így az M_p *és* M_{p+2} *Mersenne-szám párra* elméletileg a következő négy eset lehetséges:

(8)

	a. ***Mersenne-ikerprímek***	**b.**	**c.**	**d.**
M_p	***prím***	***prím***	***Nem prím***	***Nem prím***
M_{p+2}	***prím***	***Nem prím***	***prím***	***Nem prím***
Példák az 1. tábla soraiban	1.-2. 5.-6. 19.-20.	*NEM LEHETSÉGES!* *(lásd 1.tétel)*	3.-4. 9.-10.	13.-14.

Érdekes problémát vet fel, hogy a (8)/b. esetre az első húsz Mersenne-szám között nem találunk példát (lásd 1. táblázat). Ennek oka a következő 1. tétel.

1. TÉTEL
Ha M_p Mersenne-prím, akkor M_{p+2} nem lehet összetett szám.

BIZONYÍTÁS
A (7) összefüggés szerint $M_{p+2}=4M_p+3$, ami akkor és csak akkor lehet összetett szám, ha M_p osztható 3-al. Ez viszont ellentmond annak, hogy a tétel feltétele szerint M_p Mersenne-prím.

Q.E.D.

Az 1. tételből következik a következő 2. tétel:

2. TÉTEL
Ha *p*, *p+2* ikerprímek és M_p Mersenne-prím, akkor M_{p+2} is Mersenne-prím. Vagyis M_p és M_{p+2} mindig *p, p+2 alapú Mersenne-ikerprímek.*

----- . -----

NYITOTT PROBLÉMA: Van-e végtelen sok *p, p+2* ikerprím, amelyhez van *p, p+2* alapú M_p, M_{p+2} Mersenne-ikerprím?

Tételezzük fel, hogy *véges sok* p, $p+2$ alapú M_p, M_{p+2} Mersenne-ikerprím van. Ekkor létezik olyan q prímszám, hogy minden $p=6k-1$ alakú $p>q$ prímszám esetén, M_p, M_{p+2} nem Mersenne-ikerprím. Ez a (8) összefüggések szerint csak úgy lehet, ha M_p nem prímszám.

A fenti nyitott probléma megválaszolása tehát ekvivalens a következő 3. tétel bizonyításával, vagy annak cáfolatával.

3. TÉTEL
Véges sok $p=6k-1$ (k term.szám) prímszám létezik, amelyre $M_p=2^p-1$ Mersenne-prím.

1. Táblázat

	k^-	k^+	$p = 6k \pm 1$	Mersenne-számok (M_p)
1.	1		5	$M_{5}=2^{5}-1=$**31 (prím)**
2.		1	7	$M_{7}=2^{7}-1=$**127 (prím)**
3.	2		11	$M_{11}=2^{11}-1=$**2.047**$=(6\cdot4-1)(6\cdot15-1)$
4.		2	13	$M_{13}=2^{13}-1=$**8.191 (prím)**
5.	3		17	$M_{17}=2^{17}-1=$**131.071 (prím)**
6.		3	19	$M_{19}=2^{19}-1=$**524.287 (prím)**
7.	4		23	$M_{23}=2^{23}-1=$**8.388.607**$=(6\cdot8-1)(6\cdot29.747-1)$
8.		4	25	***NEM Mersenne-szám*** $2^{25}-1=33.554.431=(6\cdot5+1)(6\cdot100+1)(6\cdot300+1)$
9.	5		29	$M_{29}=2^{29}-1=$**536.870.911**$=(6\cdot39-1)(6\cdot384.028-1)$
10.		5	31	$M_{31}=2^{31}-1=$**2.147.483.647 (prím)**
11.	6		35	***NEM Mersenne-szám*** $2^{35}-1=34.359.738.367=(6\cdot5+1)(6\cdot12-1)(6\cdot21+1)(6\cdot20.487-1)$
12.		6	37	$M_{37}=2^{37}-1=$**137.438.953.471**$=(6\cdot37+1)(6\cdot102.719.696+1)$
13.	7		41	$M_{41}=2^{41}-1=$**2.199.023.255.551**$=(6\cdot2.228-1)(6\cdot27.418.559-1)$
14.		7	43	$M_{43}=2^{43}-1=$**8.796.093.022.207**$=(6\cdot698.148+1)(6\cdot349.977+1)$
15.	8		47	$M_{47}=2^{47}-1=$**140.737.488.355.327**$=(6\cdot392-1)(6\cdot9.977.136.563-1)$
16.		8	49	***NEM Mersenne-szám*** $2^{49}-1=562.949.953.421.311=(6\cdot21+1)(6\cdot738.779.466.432+1)$
17.	9		53	$M_{53}=2^{53}-1=$**9.007.199.254.740.991**$=(6\cdot11.572-1)(6\cdot21.621.464.127-1)$
18.		9	55	***NEM Mersenne-szám*** $2^{55}-1=36.028.797.018.963.967=(6\cdot4-1)(6\cdot5+1)(6\cdot15-1)(6\cdot147-1)$ $(6\cdot532-1)(6\cdot33.660+1)$
19.	10		59	$M_{59}=2^{59}-1=$**576.460.752.303.423.487 (prím)**
20.		10	61	$M_{61}=2^{61}-1=$**2.305.843.009.213.693.951 (prím)**
21.	11		65	***NEM Mersenne-szám*** $2^{65}-1=36.893.488.147.419.103.231=(6\cdot5+1)(6\cdot1.365+1)$ $(6\cdot24.215.857.259.685+1)$
22.		11	67	$M_{67}=2^{67}-1=$**147.573.952.589.676.412.927**$=$ $(6\cdot32.284.620+1)(6\cdot126.973.042.881+1)$

Hivatkozás jegyzék

[Dénes 2001a] Complementary prime-sieve PUre Mathematics and Applications, Vol.12 (2001), No. 2, pp. 197-207
http://www.titoktan.hu/_raktar/_e_vilagi_gondolatok/PUMA-CPS.pdf

[Dénes 2001b] Komplementer prímszita és alkalmazása a prímszámok számának becslésére
http://www.titoktan.hu/_raktar/_e_vilagi_gondolatok/KomplementerPrimszita.pdf

[Dénes 2001c] Mersenne-számok alapvető tulajdonságai
(Párhuzamos algoritmus a Mersenne-számok prímfelbontására)
http://www.titoktan.hu/_raktar/_e_vilagi_gondolatok/Mersenne-primek1.pdf