CSEPELI MŰSZAKI-KÖZGAZDASÁGI SZEMLE

1980
1

Rendszerek strukturális modellezéséről

DÉNES TAMÁS

tudományos munkatárs
Központi Szolgáltatásfejlesztési Kutató Intézet

Az általános rendszerelméletben gyakorta idézett tétel, hogy a rendszerek működése és struktúrája között kölcsönhatás áll fenn. Alkalmazási, illetve modellezési oldalról igen lényegesnek tartjuk a kölcsönhatásra felhívni a figyelmet, mivel egy kevéssé elterjedt szemléletet és modellezési stratégiát (egyben eszköztárat) ad kezünkbe a rendszerek vizsgálatához. Ez a szemlélet, illetve stratégia a rendszermodellezés struktúra oldalról való megközelítése. A cikk e problémakör néhány elméleti vonatkozását tárgyalja.

A rendszerfogalom értelmezése

A rendszerelmélet manapság még korántsem mondható egységesnek saját alapkategóriájának, a „rendszer'' fogalomnak általános definíciója terén.

Így standard definíció híján adunk egy rendszer definíciót, melynek értelmezésével (alapkategória lévén) részletesebben foglalkozunk.*

1. DEFINÍCIÓ

Az $S = (T, A, E, R)$ négyest *rendszernek* nevezzük, ahol

T: a rendszert tartalmazó totalitás
A: a vonatkoztatási szempontok halmaza
E: a rendszer elemeinek halmaza
R: az elemek közötti relációk (viszonyok) halmaza, amelyre teljesül, hogy

$$\forall R \in R \Rightarrow R \subseteq E \times E \tag{1}$$

ahol „x'' a Descartes szorzást jelöli, valamint megköveteljük az alábbi feltételek teljesülését:

$$A \neq \emptyset, \quad S \subseteq T \tag{2}$$
$$|E| \geqslant 2 \tag{3}$$
$$R \neq \emptyset \tag{4}$$

A (3), (4) feltételek valamelyikének nem teljesülése esetén (elfajuló rendszer) az alábbi esetek állhatnak elő:

$$|E| = 1 \text{ és } R = \emptyset \tag{3a}$$
ekkor elemről,
$$|E| > 1 \text{ és } R = \emptyset \tag{4a}$$
ekkor elemhalmazról

beszélünk. Az $|E| = 0$ és $R = \emptyset$ esettel természetesen nem foglalkozunk.

* Ezúton mondok köszönetet *Gelléri Péter* és *Babics László* kollégáimnak, akikkel folytatott értékes beszélgetések nagyban hozzájárultak az itt leírásra kerülő gondolatok rendezéséhez.

Az 1. definíció mélyén az az alapgondolat lapul, hogy egy S rendszer tulajdonképpen *bizonyos* elemek és ezek közötti *bizonyos* viszonyok összessége. Az előző mondatban a „bizonyos'' szó kétszeri aláhúzott szerepeltetése két alapvető tényt reprezentál.

t1. Nincs értelme általában egy rendszerről, illetve rendszer-elemekről és ezek közötti viszonyokról beszélni.

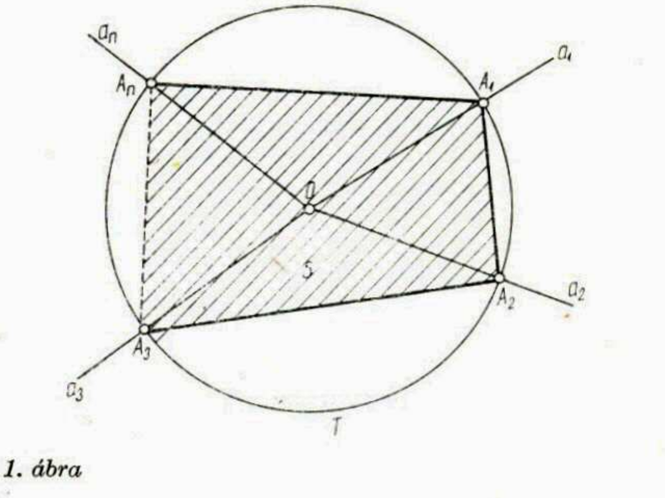
t2. Szükséges egy rendszer definiálásához olyan kategória, amely módot ad a rendszer, rendszerelem, elemek közötti viszonyok kategóriáinak összekapcsolására.

Ezeket a követelményeket kívánja kielégíteni a *totalitás* és *vonatkoztatási szempont* kategóriája, amelyeket a továbbiakban alapfogalomként kezelünk, így nem definiáljuk.

Egy rendszert úgy foghatunk fel, mint valamely totalitás adott vonatkoztatási szempontok alapján kimetszett része (lásd (2)).

Ennek az elvnek szemléltetésére mutatjuk be az alábbi absztrakt modellt.

Jelöljük az S rendszert tartalmazó totalitást T-vel és ábrázolja ezt egy 0 középpontú kör (lásd *1. ábra*).



1. ábra

A vonatkoztatási szempontokat ábrázolja egy-egy 0-ból kiinduló félegyenes, melyeket jelöljük rendre az $a_1, a_2, \ldots, a_i, \ldots$ jelekkel. Az a_i $(i = 1, 2, \ldots)$ félegyenes T körrel való metszéspontját jelöljük A_i-vel (lásd 1. ábra).

Ekkor a T totalitás $a_1, a_2, \ldots, a_n$ vonatkoztatási szempontok által kimetszett részét (azaz az ezek által kijelölt S rendszert) az $A_1, A_2, \ldots, A_n$ csúcsok által kijelölt sokszög reprezentálja (ezt az egyszerűség kedvéért szintén S-sel fogjuk jelölni).

Ezen az egyszerű elvi modellen könnyen szemléltethető a vonatkoztatási szempontok két igen lényeges tulajdonsága.

t3. A különböző vonatkoztatási szempontok minőségileg nem azonos értékűek a rendszer kijelölésében.

Jelöljük ugyanis $t(T)$-vel a T kör által kijelölt körlap területét és $t(S)$-sel az $A_1, A_2, \ldots, A_n$ pontok által kijelölt sokszöglap területét (utóbbi az 1. ábrán bevonalkázott terület). Ha a T kör különböző pontjai képviselik az egyes vonatkoztatási szempontok különböző minőségét, akkor könnyű belátni, hogy azonos számú, de eltérő minőségű (tartalmú) vonatkoztatási szempont esetén, azaz ha

$$A = \{a_1, a_2, \ldots, a_n\} \neq A' = \{a'_1, a'_2, \ldots, a'_n\} \quad (5)$$

akkor általában teljesül, hogy

$$t(S) \neq t(S') \Rightarrow \frac{t(S)}{t(T)} \neq \frac{t(S')}{t(T)} \quad (6)$$

A $\frac{t(S)}{t(T)}$ hányados tekinthető a T totalitás megközelítési százalékának. (Felhívjuk a figyelmet e modell elvi jellegére.)

Illusztrációként a fenti gondolatmenethez, tekintsük a *2a, 2b* ábrákat, ahol a vonatkoztatási szempontok száma három $(n = 3)$.

t4. A vonatkoztatási szempontok mennyisége (száma) a másik lényeges tulajdonság.

Egyszerű geometriai megfontolásokból adódik ugyanis, hogy

$$n = |A| \to \infty \Rightarrow \frac{t(S)}{t(T)} \to 1 \Rightarrow S \to T \quad (7)$$

Megjegyezzük továbbá, hogy egy adott S *rendszer környezete* a fenti elvi modellben jól értelmezhető, mint *S-nek T-re* vonatkozó komplementere, amelynek mértéke $t(T) - t(S)$.

Természetesen az 1. definíció alapján a T totalitás is rendszer. (Nevezhetnénk T-t teljes vagy vonatkoztatási rendszernek is.)

Ez könnyen adódik a (7) összefüggésből is, hiszen ekkor a (2) összefüggésben megengedett $S = T$ eset áll elő, vagyis

$$T = (T, \mathbf{A}, \mathbf{E}, \mathbf{R}) \quad (8)$$

ahol

$$|A| = \infty, |\mathbf{E}| \geq 2, \mathbf{R} \neq \emptyset \quad (9)$$

A rendszerrel kapcsolatos alapvető fogalmakról

Legyen $S = (T, A, E, R)$ a tárgyalt rendszer, és használjuk a (8) -ban bevezetett jelöléseket. Ekkor legyen továbbá a ρ_1, valamint a φ_1 leképezés a következő:

$$\rho_1 : A \to \mathbf{E} \quad (A \subseteq \mathbf{A}) \quad (10)$$

azaz

$$\forall a_i \in A \Rightarrow \exists!(E_i \subseteq \mathbf{E} : \rho_1(a_i) = E_i \quad (11)$$

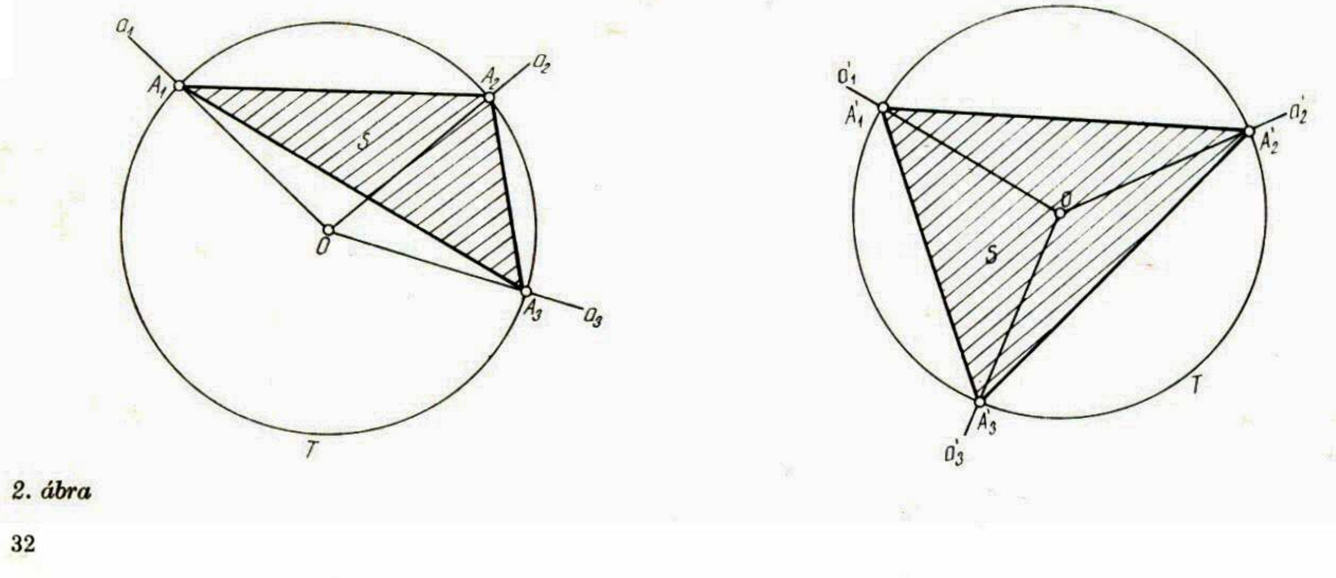
valamint

$$\varphi_1 : \mathbf{A} \to \mathbf{R} \qquad (\mathbf{A} \subseteq \mathbf{A}) \quad (12)$$

azaz

$$\forall a_i \in A \Rightarrow \exists!\ R_i \subseteq \mathbf{R} : \varphi_1(a_i) = \bigcup_{\forall R \in R_i} R \quad (13)$$

Ekkor az E és R halmazok a következőképpen állnak elő:



2. ábra

$$E = \cap \rho_1 (a_i) = \bigcap_{i=1}^{|A|} E_i \quad (14)$$

$$R = \biguplus_{\forall a_i \in A} [\varphi_1 (a_i) \cap E \times E] \quad (15)$$

ahol „$\uplus$"az általunk bővített uniónak nevezett művelet, melynek értelmezése tetszőleges A és B halmazok esetén: $A \uplus B = (A \cup B) \cup (A \cap B)$.

A (14), (15) összefüggésekből látható, hogy (3a), (4a)-ban leírt (elfajuló rendszer) esetek könnyen előállhatnak, és ezt pontosan az A halmaz elemei (azaz a vonatkoztatási szempontok) szabályozzák a ρ_1, φ_1 leképezések által. Ez pontosan a rendszerelméletben elfogadott: „minden rendszer elem és minden elem rendszer adott vonatkoztatási szinten" elvet írja le. Az elv jelen értelmezési keretben történő taglalásától itt eltekintünk terjedelmi korlátokra való tekintettel.

Más oldalról bármely *S rendszert* elméletileg *mint információ-halmazt* foghatunk fel.

Jelöljük az S rendszer által képviselt információhalmazt $I(S)$-sel. Így a már leírt rendszer $\leftrightarrow$ elem átmenetből adódik, hogy az S rendszer minden eleméhez és relációjához tartozik egy *potenciális információ-halmaz,* amelyet $e \in E$, illetve $\mathbf{R} \in R$ esetén rendre $I(e)$-vel és $I(\mathbf{R})$-rel jelölünk, azaz

$$\forall e \in E \Rightarrow \in \exists\, I(e) \subset I(S) \quad (16)$$

valamint

$$I(E) = \bigcup_{\forall e \in E} I(e) \quad (17)$$

hasonlóképpen

$$\forall R \in R \Rightarrow I(R) = 2^{I(E \times E)} \quad (18)$$

$$I(R) = \bigcup_{\forall R \in R} I(R) = 2^{I(E \times E)} \quad (19)$$

ahol $2^{I(E \times E)}$ az $I(E \times E)$ halmaz hatványhalmazát jelöli. Továbbá teljesül az alábbi két igen lényeges összefüggés:

$$I(E \times E) = I(E) \times I(E) \quad (20)$$

$$I(S) = I(E) \cup I(R) \quad (21)$$

A (21) összefüggés fontossága abban rejlik, hogy kimondja:

a rendszer által reprezentált információ az elemei és a köztük levő viszonyok által reprezentált potenciális információk összessége.

Ezek alapján az elemek, illetve a rendszer állapotát az alábbi definíció szerint értelmezzük.

2. DEFINÍCIÓ

Tekintsük az $S = (T, A, E, R)$ rendszert és legyen egy τ időpontban ($\tau \geqslant 0$ egész szám) $\rho_2^{(\tau)}$ a következő leképezés:

$$\rho_2^{(\tau)} : E \to I(E) \quad (22)$$

pontosabban

$$\forall e \in E \Rightarrow \exists!\, i_e \in I(e) : \rho_2^{(\tau)}(e) = i_e \quad (23)$$

továbbá

$$\rho_2^{(\tau)}(E) = \{\rho_2^{(\tau)}(e) \mid \forall e \in E\} \quad (24)$$

A $\rho_2^{(\tau)}(e)$ információt az „e" *elem,* a $\rho_2^{(\tau)}(E)$ információ-halmazt az *E elemhalmaz* τ időpontbeli *állapotának* nevezzük.

3. DEFINÍCIÓ

Tekintsük az $S = (T, A, E, R)$ rendszert és legyen egy τ időpontban ($\tau \geqslant 0$ egész szám) $\varphi_2^{(\tau)}$ a következő leképezés:

$$\varphi_2^{(\tau)} : R \to I(R) \quad (25)$$

pontosabban

$$\forall \mathbf{R} \in R \Rightarrow \exists!\, i_R \in I(\mathbf{R}) : \varphi_2^{(\tau)}(\mathbf{R}) = i_R \quad (26)$$

továbbá

$$\varphi_2^{(\tau)}(R) = \{\varphi_2^{(\tau)}(\mathbf{R}) \mid \forall \mathbf{R} \in R\} \quad (27)$$

A $\varphi_2^{(\tau)}(R)$ információ-halmazt az *S rendszer* τ időpontbeli *struktúrájának* nevezzük.

4. DEFINÍCIÓ

Az $S = (T, A, E, R)$ *rendszer* τ időpontbeli ($\tau \geqslant 0$ egész szám) *állapotán* (jelölése: $C_\tau(S)$), az elemei állapotának és struktúrájának együttesét értjük. Pontosabban

$$C_\tau(S) = \rho_2^{(\tau)}(E) \cup (\varphi_2^{(\tau)} R) \quad (28)$$

E hosszas előkészületek után rátérhetünk a rendszer működése fogalmának definiálására, amely azután módot ad fő tételünk kimondására.

5. DEFINÍCIÓ

Egy $S = (T, A, E, R)$ *rendszer* (τ_i, τ_j) időintervallumban ($0 \leqslant \tau_i < \tau_j$) történő *működésén* a következőt értjük:

$$\forall \tau_i \leqslant \tau_k < \tau_j \Rightarrow C_{\tau_k}(S) \neq C_{\tau_{k+1}}(S) \quad (29)$$

Az 5. definíció tehát a működést, mint a rendszer állapotváltozás sorozatát definiálja.

Megjegyezzük, hogy bár a definíció (és a további tárgyalás is) diszkrét időpontokkal dolgozik, ez csak az egyszerűbb tárgyalásmódot segíti, mivel folytonos esetre analóg módon definiálhatók a fogalmak, csak a leírás válik hosszadalmasabbá.

A struktúra — működés kölcsönhatásának elve

1. TÉTEL

Az $S = (T, A, \mathrm{E}, R)$ rendszer elemeinek adott időpontbeli állapota meghatározza a rendszer ugyanezen időpontbeli struktúráját.

Bizonyítás

A (26) és (18) összefüggések alapján adódik, hogy

$$\forall R \in R \Rightarrow \varphi_2^{(\tau)}(R) \in I(R) = 2^{I(E\times E)} \Rightarrow \Rightarrow \varphi_2^{(\tau)}(R) \subseteq I(E \times E) \quad (30)$$

Továbbá (20) alapján:

$$\varphi_2^{(\tau)}(R) \subseteq \mathrm{I}(E) \times I(E) \quad (31)$$

Ha (31) jobboldalába az E halmaz τ időpontbeli állapotát beírjuk, akkor azt kapjuk, hogy

$$\forall \mathbf{R} \in R \Rightarrow \varphi_2^{(\tau)}(R) \subseteq \rho_2^{(\tau)}(E) \times \rho_2^{(\tau)}(E) \quad (32)$$

Ez pedig pontosan állításunkat igazolja.

Ezek után fő tételünk szemléletesen a következőképpen fogalmazható meg:

Bármely rendszer működése együttjár struktúrája megváltozásával és megfordítva, azaz a működés és struktúra állandó kölcsönhatásban vannak egymással.

Az alábbi 2. tétel fő tételünket először az egyik irányba mondja ki és bizonyítja.

2. TÉTEL

Legyen $S = (T, A, E, R)$ tetszőleges rendszer és (τ_i, τ_j) adott időintervallum $(0 \leqslant \tau_i < \tau_j)$. Ha az S rendszer működik a (τ_i, τ_j) időintervallumban, akkor

$$\forall \tau_i \leqslant \tau_k < \tau_j \Rightarrow \varphi_2^{(\tau_k)}(R) \neq \varphi_2^{(\tau_{k+1})}(R) \quad (33)$$

Bizonyítás

A rendszer működésének 5. definíciója alapján érvényes a (29) összefüggés. Ez (28) szerint az alábbi három esetben teljesülhet:

$$\forall \tau_i \leqslant \tau_k < \tau_r \Rightarrow \rho_2^{(\tau_k)}(\mathrm{E}) \neq \neq \rho_2^{(\tau)_{k+1}}(\mathrm{E}) \text{ és } \varphi_2^{(\tau_k)}(R) = \varphi_2^{(\tau_{k+1})}(R) \quad (34)$$

$$\forall \tau_i \leqslant \tau_k < \tau_j \Rightarrow \rho_2^{(\tau_k)}(\mathrm{E}) = = \rho_2^{(\tau_{k+1})}(\mathrm{E}) \text{ és } \varphi_2^{(\tau_k)}(R) \neq \varphi_2^{(\tau_{k+1})}(R) \quad (35)$$

$$\forall \tau_i \leqslant \tau_k < \tau_j \Rightarrow \rho_2^{(\tau_k)}(\mathrm{E}) \neq \rho_2^{(\tau_{k+1})}(\mathrm{E}) \text{ és } \varphi_2^{(\tau_k)}(R) \neq \varphi_2^{(\tau_{k+1})}(R) \quad (36)$$

Az 1. tétel alapján világos, hogy a (35)-ben leírt eset nem állhat elő.

A (36) esetben pontosan a bizonyítandó (33) állításhoz jutunk, így csak a (34) eset bizonyítására kell szorítkoznunk, amelyről bebizonyítjuk, hogy nem állhat elő. Ugyanis

$$\forall \tau_i \leqslant \tau_k < \tau_j \Rightarrow \rho_2^{(\tau_k)}(\mathrm{E}) \neq \rho_2^{(\tau_{k+1})}(\mathrm{E}) \Rightarrow \Rightarrow \exists\, e \in \mathrm{E} : \rho_2^{(\tau_k)}(e) \neq \rho_2^{(\tau_{k+1})}(e) \Rightarrow \Rightarrow \forall \mathbf{R} \in R \text{ és } f \in \mathrm{E} : (\rho_2^{(\tau_k)}(e)\, \rho_2^{(\tau_k)}(f)) \in \varphi_2^{(\tau_k)}(\mathbf{R}) \Rightarrow \Rightarrow (\rho_2^{(\tau_{k+1})}(e)\, \rho_2^{(\tau_{k+1})}(\mathrm{f})) \in \varphi_2^{(\tau_k)}(\mathbf{R}) \quad (37)$$

Azonban

$$(\rho_2^{(\tau_{k+1})}(\mathrm{e})\, \rho_2^{(\tau_{k+1})}(\mathrm{f})) \in \varphi_2^{(\tau_{k+1})}(\mathbf{R}) \Rightarrow \Rightarrow \varphi_2^{(\tau_k)}(\mathbf{R}) \neq \varphi_2^{(\tau_{k+1})}(\mathbf{R}) \quad (38)$$

Ez viszont ellentmond a (34) összefüggésnek, amivel bebizonyítottuk, hogy csak a (36) eset állhat fenn, amivel a tételt beláttuk.

A tétel következményeként igen érdekes összefüggésre hívjuk fel a figyelmet:

Egy rendszer működése elemei állapotváltozásán keresztül van kölcsönhatásban struktúrája megváltozásával.

Azaz bármely rendszer működése elemei működésén keresztül realizálódik.

A (28) összefüggés alapján könnyen belátható, hogy a 2. tétel megfordítása is igaz, így a rendszerek működése és struktúrája közötti kölcsönhatás az alábbi szükséges és elegendő feltétel formájában fogalmazható meg.

3. TÉTEL

Legyen $S = (T, A, \mathrm{E}, R)$ tetszőleges rendszer és (τ_i, τ_j) adott időintervallum $(0 \leqslant \tau_i < \tau_j)$, ekkor

$$\forall \tau_i \leqslant \tau_k < \tau_j \Rightarrow C_{\tau_k}(S) \neq C_{\tau_{k+1}}(S) \Leftrightarrow \Leftrightarrow \forall \tau_i \leqslant \tau_k < \tau_t \Rightarrow \varphi_2^{(\tau_k)}(R) \neq \varphi_2^{(\tau_{k+1})}(R)$$

Rendszerek strukturális modellezése

A rendszerek struktúrájának 3. definíciójából, de főleg a (26) definíciós összefüggés (32) alakjából kézenfekvőnek látszik rendszerek strukturális modellezésére a gráfelméletet felhasználni. (Strukturális modellezésen a rendszer struktúra oldalról való leírását értjük.)

Tekintsük ugyanis az $S = (T, A, \mathrm{E}, R)$ rendszert adott τ időpontban és definiáljuk a $G_S^{(\tau)} = (P_S^{(\tau)}, E_S^{(\tau)})$ gráfot ($\mathrm{P}_S^{(\tau)}$ a gráf szögponthalmaza, $G_S^{(\tau)}$ az élhalmaza) az alábbi módon:

$$\forall ie_u \in \rho_2^{(\tau)}(\mathrm{E}) \Rightarrow \exists!\, p_u \in P_S^{(\tau)} \quad (39)$$

$$\forall \mathbf{R} \in R: \forall\ (\rho_2^{(\tau)}(e_u)\ \rho_2^{(\tau)}(e_v)) \in \varphi_2^{(\tau)}(\mathbf{R}) \Rightarrow \Rightarrow \exists !\ (p_u p_v) \in \mathrm{E}_s^{(\tau)} \tag{40}$$

A különböző relációkhoz tartozó éleket úgynevezett színezéssel különböztetjük meg, így $G_s^{(\tau)}$ az S rendszer τ időpontbeli struktúráját modellező színezett élű gráf.

A 3. tétel alapján az S rendszer működése a (τ_i, τ_j) időintervallumban tehát egy $G_s(\tau_i)$, $G_s(\tau_{i+1})$, ..., $G_s(\tau_j)$ gráf-sorozattal modellezhető strukturálisan. E modellezési eljárás lehetőséget biztosít a rendszer elemeinek (illetve egészének) egy vagy több szempont szerinti állapotváltozás leírásán túlmenően, ugyanezen szempontok mentén, az elemek közötti viszonyok egyidejű változásának vizsgálatára.

Terjedelmi korlátok miatt (e cikkben nincs mód sem a strukturális modellezés és elemzés részletesebb tárgyalására, sem ennek összevetésére más jelenleg elterjedt rendszermodellezési eljárással (input-output, állapotfüggvény stb.). Megjegyezzük azonban, hogy a fenti hiányokat részben már az eddigiekben pótoltuk, részben az elkövetkezőkben több dolgozatban igyekszünk pótolni (lásd az irodalomjegyzéket).

IRODALOM

[1] *Dénes Tamás:* Szervezetek struktúrájának gráfelméleti vizsgálata. CsM ISZI, FMKT pályázat, 1976.

[2] *Dénes Tamás;* Társadalomtudományi kutatások adatainak gráfelméleti szintézis-modellje. II. Hung. Computer Science Conf., Budapest, 1977.

[3] *Babics László, Dénes Tamás:* Rétegződési és mobilitási struktúra gráfelméleti vizsgálata VII. Magyar Operációkutatási Konf., Pécs, 1977.

[4] *Dénes Tamás:* Graph theoretical approach to structural representation of systems. Proceedings of the Fourth International Conf. for Pattern Recognition, Kyoto, Japan, 1978.

[5] *Dénes Tamás, Gelléri Péter:* On the use of mathematics to sociology today. In: Sociology of Science and Research, Akadémiai Kiadó, megjelenés alatt

[6] *Dénes Tamás:* Szekvenciális rendszerek gráfelméleti modellezése. Információ Elektronika, 1978/6.