Rendszerváltozók strukturaelemzésének elmélete és gráfelméleti modellje

Dénes Tamás matematikus
Budapest, 1984.

Általános rendszerek modellezésével, elméleti leírásával foglalkoztam az [1], [2], [3] dolgozataimban. Jelen dolgozat a rendszerek empirikus megközelítésével, azaz a leírásukra szolgáló rendszerváltozók strukturális leírásával foglalkozik.

Rendszerek leíró változói közötti összefüggések struktúraelemzésének alapgondolata:
AZ ADOTT RENDSZERT LEÍRÓ ÖSSZES VÁLTOZÓ EGYSÉGES VONATKOZTATÁSI RENDSZERRE TRANSZFORMÁLÁSA.

1. Mit értünk ezen?

1.1. A vizsgálataink tárgyát képező rendszerek (jelenségek) empirikus leírását minden esetben, a rendszer elemein mért változókkal végezzük. Ezek a mérések azonban csak elemi információkkal szolgálnak az egyes változókról. További probléma, hogy a változók tartalma inhomogén még akkor is, ha matematikailag azonos mértékeket értelmezünk rajtuk.
Célunk: az így kapott elemi információhalmazból a jelenség minél teljesebb leírását megadni.

1.2. A rendszer (jelenség) teljesebb leírását a leíró változók közötti viszonyok (relációk) együtteseként értelmezzük, azaz keressük a leíró változók halmazának struktúráját.
Ehhez ***szükség van a teljes változóhalmaz bármely két változójának összehasonlíthatóságára, amit a változók tartalmi inhomogenitása miatt, csak a változók egységes vonatkoztatási rendszerben történő ábrázolásával érhetünk el.***
Vegyük észre, hogy az egységes vonatkoztatási rendszer pontosan a rendszert (jelenséget) alkotó elemek halmazán értelmezett relációkból adódik! Hiszen ezek az elemek azok, amelyek a rendszert (jelenséget) leíró összes változó (mint megközelítési szempont) által képviselt információkat hordozzák. Vagyis az általunk felvett változók éppen ezeken az elemeken realizálódnak. Tehát a változók struktúraelemzésének sarkalatos pontjához értünk:
A rendszert (jelenséget) leíró bármely változóhoz hozzárendelhető az őt az egységes vonatkoztatási rendszerben reprezentáló struktúra.

1.3. Így bármely két változó összehasonlíthatóvá válik, amint megtaláljuk azt a matematikai modellt (lásd a 2.fejezetet), amely a fenti elvet realizálni képes. Ezután a változók összehasonlításának lényege: ***a megfelelő változóstruktúrák hasonlóságának mérése.***
A hasonlóság mértékét a metszetstruktúráknak az alapstruktúrákhoz való viszonyítása szabja meg. Erre képezzük majd a „fedési-mutató”-nak nevezett értéket, amely adott A és B struktúrák esetén nem feltétlenül szimmetrikus, hiszen értéke függ attól, hogy a metszetstruktúrát az A, vagy a B struktúrákra vonatkoztatjuk-e. Ez az asszimetria hasonlóan képzelhető el, mint a feltételes valószínűség (az analógiát a 3.pontban tárgyaljuk).

2. A matematikai modell

2.1.
Legyen $H = \{h_1, h_2, ..., h_m\}$ a rendszert (jelenséget) hordozó elemek halmaza. $X = \{x_1, x_2, ..., x_n\}$ a rendszert leíró változók halmaza, valamint bármely $x_i \in X$ változóhoz tartozzon egy meghatározott $K_i = \{k_{i_1}, k_{i_2}, ..., k_{i_{n_i}}\}$ kódhalmaz, amelyben a változó különböző mért értékei vannak. Továbbá a h_j elem x_i változó szerinti realizációját (mért értékét) jelöljük $h_j(x_i)$-vel. Nyilvánvaló, hogy $h_j(x_i) \in K_i$

2.2.
Minden egyes $x_i \in X$ változóra értelmezzük a következő R_i relációt, amelyet ***x_i H halmazon értelmezett struktúrájának nevezünk***:

(2.1) $$R_i \subseteq H \times H$$

(2.2) $$h_u, h_v \in H, (h_u h_v) \in R_i \quad \Leftrightarrow \quad h_u(x_i) = h_v(x_i) = k_{i_r} \in K_i$$

2.3.
Minden egyes $x_i \in X$ változó R_i struktúrájához egyértelműen hozzárendelünk egy $G_i = (P, E_i)$ gráfot, ahol

(2.3) $P = \{p_1, p_2, ..., p_m\}$ a gráf szögpont halmaza és minden egyes $h_j \in H$ elemhez pontosan a $p_j \in P$ szögpontot rendeljük hozzá.

Továbbá a gráf E_i élhalmaza:

(2.4) $$(p_u p_v) \in E_i \quad \Leftrightarrow \quad h_u R_i h_v = (h_u h_v) \in R_i$$

Így mindegyik $x_i \in X$ változó a közös elemhalmazon értelmezett relációval, illetve a $G_1, G_2, ..., G_n$ gráfokkal modellezhető.

2.4. ***Fedési-mutató***

Bármely két változó viszonyát egységesen, a H halmazon értelmezett megfelelő gráfok összehasonlításával állapítjuk meg. ***Változók viszonyán*** a következőt fogjuk érteni:

Legyen $x_i, x_j \in X$, ekkor az ***„x_i maximálisan hat x_j-re”*** relációt (jelölése: $x_i \to x_j$) a következőképpen definiáljuk:

(2.5) $$x_i \to x_j \quad \Leftrightarrow \quad \forall h_u, h_v \in H, h_u(x_i) = h_v(x_i) = k_{i_r} \in K_i \Rightarrow$$
$$\Rightarrow h_u(x_j) = h_v(x_j) = k_{j_s} \in K_j$$

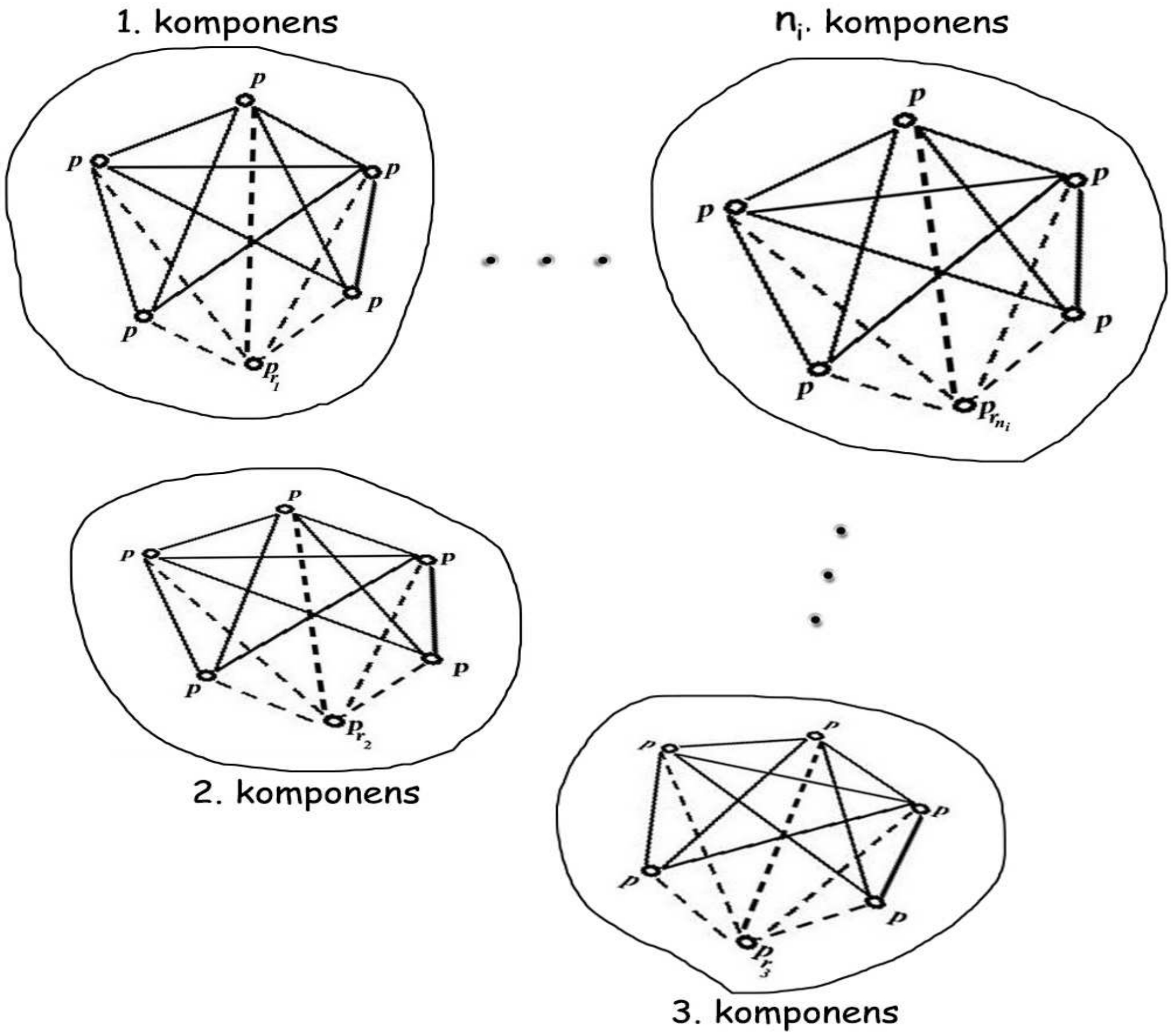
Azaz az x_i változó akkor hat maximálisan x_j-re, ha x_i bármely realizációjának megváltozása az x_j változó megfelelő realizációjának megváltozását eredményezi.
A (2.5) definíciós összefüggést írjuk fel az x_i, x_j változók struktúrái, illetve az ezeket modellező gráfok segítségével:

(2.5a) $$x_i \to x_j \quad \Leftrightarrow \quad \forall h_u, h_v \in H,\, h_u R_i h_v \Rightarrow h_u R_j h_v$$

illetve

(2.5b) $$x_i \to x_j \quad \Leftrightarrow \quad G_i \subseteq G_j$$

A (2.5), (2.5a) összefüggések által definiált relációk a *H* halmaz egy-egy osztályozását adják. Az x_i változóhoz rendelt $G_i=(P,E_i)$ gráf n_i darab teljes részgráf komponensből áll (lásd 2.1.ábra), ahol $r_1 + r_2 + r_3 + \ldots + r_{n_i} = m$.



2.1. ábra

Tehát a változók közötti (adott irányú!) maximális hatás a megfelelő gráfok tartalmazási relációjával modellezhető.
A *maximális hatás* azonban igen ritka esete (teljes determináltság) a változók közötti hatásnak, amelynek másik szélső esete a null-hatás, azaz a *hatásmentesség*. A két határeset közötti hatás jellemzésére vezetjük be az általunk ***fedési-mutató***-nak nevezett értéket. Jele: $F(x_j,x_i)$, illetve $F(x_i,x_j)$. A *fedési-mutató* értékét a két változó struktúráját modellező G_i és G_j gráfok alapján számítjuk ki:

(2.6)
$$F\left(x_j, x_i\right) = \frac{\left|E_i \cap E_j\right|}{\left|E_i\right|}$$

(2.7)
$$F\left(x_i, x_j\right) = \frac{\left|E_i \cap E_j\right|}{\left|E_j\right|}$$

A *fedési-mutató* tehát nem szimmetrikus, azaz irányított hatást fejez ki. Ez tartalmilag azt jelenti, hogy általában az x_i változó megváltozása nem ugyanolyan mértékben hat az x_j változóra, mint fordítva (lásd a (2.5) összefüggés értelmezését).

PÉLDA
Legyen $\left|H\right| = 6$, $x_i \rightarrow K_i = \{1,2,3\}$, $x_j \rightarrow K_j = \{10,20\}$, valamint a H halmazbeli realizációk a következők:

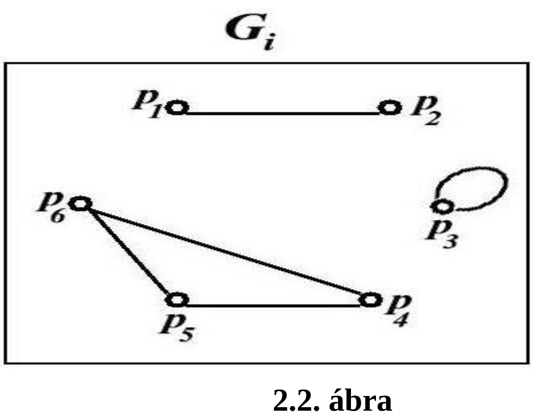
(2.8)
$$\begin{aligned} &h_1(x_i) = 1,\ h_2(x_i) = 1,\ h_3(x_i) = 2,\ h_4(x_i) = 3,\ h_5(x_i) = 3,\ h_6(x_i) = 3 \\ &h_1(x_j) = 10,\ h_2(x_j) = 10,\ h_3(x_j) = 10,\ h_4(x_j) = 20,\ h_5(x_j) = 20,\ h_6(x_j) = 20 \end{aligned}$$

Ekkor a (2.2) összefüggés alapján az R_i és R_j relációkra az alábbiakat kapjuk:

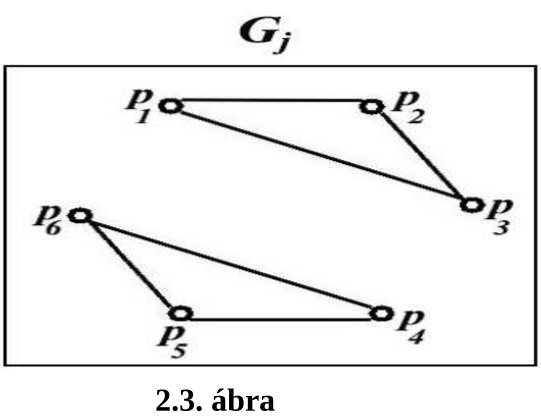
(2.8a)
$$R_i = \{(h_1h_2),(h_2h_1),(h_3h_3),(h_4h_5),(h_5h_4),(h_4h_6),(h_6h_4),(h_5h_6),(h_6h_5)\}$$
$$R_j = \begin{Bmatrix} (h_1h_2),(h_2h_1),(h_1h_3),(h_3h_1),(h_2h_3),(h_3h_2),(h_4h_5),(h_5h_4),(h_4h_6), \\ (h_6h_4),(h_5h_6),(h_6h_5) \end{Bmatrix}$$

A (2.8a)-beli relációkat a 2.2.-2.3.ábrák gráfjai mutatják, amelyekre teljesül, hogy

(2.9)
$$\xrightarrow{(2.8a)} G_i \subset G_j \overset{(2.5b)}{\Rightarrow} x_i \rightarrow x_j$$
$$\xrightarrow{(2.6),(2.7),(2.8a)} F\left(x_j, x_i\right) = \frac{4}{4} = 1 \quad \textit{és} \quad F\left(x_i, x_j\right) = \frac{4}{6} = 0.666$$



2.2. ábra



2.3. ábra

A változók közötti hatás fenti definíciójából kitűnik, hogy az általában kölcsönhatásnak nevezett eset, itt csak speciális esetként adódik (szimmetrikus hatás). Ugyanis kölcsönhatás csak akkor áll elő, ha az x_i és x_j változókra fennáll, hogy $F(x_i, x_j) = F(x_j, x_i)$, amelynek érdekes következménye, hogy bármely két változó esetén, nem csak egy, hanem *különböző szintű kölcsönhatás* állhat elő (a szintet a fedési-mutatók értéke jelenti).

Tehát a változók közötti kölcsönhatás igen ritka jelenség!

A fedési-mutató szélső értékeire az alábbiak teljesülnek az x_i és x_j *változók maximális*, illetve *nullhatása* esetén:

(2.10) $$x_i \to x_j \overset{(2.7)}{\Rightarrow} G_i \subseteq G_j \Rightarrow E_i \cap E_j = E_i \Rightarrow \frac{|E_i \cap E_j|}{|E_i|} = \frac{|E_i|}{|E_i|} = F_{\max}(x_j, x_i) = 1$$

(2.11) $$G_i \cap G_j = \varnothing \Rightarrow E_i \cap E_j = \varnothing \Rightarrow \frac{|E_i \cap E_j|}{|E_i|} = \frac{0}{|E_i|} = F_{\min}(x_j, x_i) = 0$$

Tehát $F(x_j, x_i)$ szélső értékeire adódik:

(2.12) $$0 \le F(x_j, x_i) \le 1$$

2.5. *Normált fedési-mutató*

Az eddigiek során úgy tekintettük, mintha az x_i és x_j változókat tetszőleges gráfokkal reprezentálhatnánk, így a fedési-mutatók minimális értéke mindig a metszet nélküli gráfok esetében adódik.
Általában azonban az x_i és x_j változókhoz tartozó gráfoknak nem üres a metszete, így az $F(x_i, x_j)$ és $F(x_j, x_i)$ fedési-mutatók minimális értéke nagyobb nullánál, sőt ez a minimális érték a két változó megválasztásától függ.
Ez a jelenség megérthető, ha tudjuk, hogy a változók tartalmi kategóriák, tehát figyelembe kell vennünk, hogy *egy adott változót a gráfoknak csak egy szűkebb csoportja reprezentálhat*. Vagyis a változó mért kódértékeinek eloszlása meghatározza azoknak a gráfoknak a körét, amelyek az adott változót reprezentálhatják. Ez a tény alapvető befolyást gyakorol a két változóhoz tartozó fedési-mutatóra is.
A megfelelő kombinatorikus levezetéssel megkaphatjuk bármely két x_i és x_j változóhoz az $F_{\min}(x_i, x_j)$ elméleti minimum értéket, amelynek segítségével az általunk ***normált fedési-mutató***-nak nevezett érték már a valódi (0,1) intervallumba transzformálható:

(2.13) $$\begin{aligned} &0 \le F_{\min}(x_i, x_j) \le F(x_i, x_j) \le F_{\max}(x_i, x_j) = 1 \quad \Rightarrow \\ &\Rightarrow \quad F(x_i, x_j) \le 1 - F_{\min}(x_i, x_j) \quad \Rightarrow \quad 0 \le \frac{F(x_i, x_j)}{1 - F_{\min}(x_i, x_j)} \le 1 \end{aligned}$$

Így már valódi alsó határt jelent a fedési-mutató (2.13) szerint transzformált értéke. Ez a két változó egyenletes közös eloszlásánál áll elő, azaz ha az egyik változó egy realizációjának megváltozása azonos valószínűséggel jár együtt a másik változó bármely realizációjának megváltozásával. A (2.13) transzformációval nyert értéket ***normált fedési-mutató***-nak nevezzük. Jelölése: $FN(x_i, x_j)$ és $FN(x_j, x_i)$

(2.14)

$$FN(x_i, x_j) = \frac{F(x_i, x_j) - F_{\min}(x_i, x_j)}{F_{\max}(x_i, x_j) - F_{\min}(x_i, x_j)} = \frac{F(x_i, x_j) - F_{\min}(x_i, x_j)}{1 - F_{\min}(x_i, x_j)}$$

$$FN(x_j, x_i) = \frac{F(x_j, x_i) - F_{\min}(x_j, x_i)}{F_{\max}(x_j, x_i) - F_{\min}(x_j, x_i)} = \frac{F(x_j, x_i) - F_{\min}(x_j, x_i)}{1 - F_{\min}(x_j, x_i)}$$

3. Analógia a feltételes valószínűséggel

A változók közötti hatás fogalmának, illetve a fedési-mutatónak könnyebb átlátása érdekében bemutatunk egy érdekes analógiát a feltételes valószínűséggel.
Tekintsük azt az eseményteret (Ω), amelynek elemi eseményei a H halmaz elemeiből képezhető összes elempárok, azaz a H halmazon értelmezett elemi relációk.

(3.1) $$\Omega = H \times H$$

Ekkor az Ω eseménytér eseményei a $H \times H$ halmaz részhalmazai, ami pontosan a H halmazon értelmezett relációkkal, azaz a megfelelő változók struktúrájával egyezik meg (lásd a 2.2. pontot). Legyen az x_i, illetve x_j változók struktúrája rendre R_i és R_j, valamint jelöljük az R_i , R_j események valószínűségeit $P(R_i)$, $P(R_j)$-vel.

Ekkor az ***„R_j bekövetkezik feltéve, hogy R_i bekövetkezik”*** feltételes esemény valószínűsége az ismert összefüggés alapján, jelölése: $P(R_j \perp R_i)$:

(3.2) $$P(R_j \perp R_i) = \frac{P(R_j R_i)}{P(R_i)}$$, ahol $(R_j R_i)$ a két esemény együttes bekövetkezését jelöli.

2.1.-ből tudjuk, hogy $|H| = m$, vagyis az Ω eseménytér elemeinek száma:

(3.3) $$|\Omega| = |H \times H| = m^2$$

Így az Ω eseménytérben az elemi események valószínűsége (azonos valószínűséget feltételezve): $\frac{1}{m^2}$. Ekkor fennállnak a következő összefüggések:

(3.4)

$$P(R_i) = |E_i| \cdot \frac{1}{m^2}$$

$$P(R_j) = |E_j| \cdot \frac{1}{m^2}$$

$$P(R_j R_i) = |E_i \cap E_j| \cdot \frac{1}{m^2}$$

(3.5) $$P(R_j \perp R_i) = \frac{P(R_j R_i)}{P(R_i)} \overset{(3.4)}{=} \frac{\dfrac{|E_j \cap E_i|}{m^2}}{\dfrac{|E_i|}{m^2}} = \frac{|E_j \cap E_i|}{|E_i|} \overset{(2.8)}{=} F(x_j, x_i)$$

4. Az egyes változók hatás-elemzése adott változókörnyezetben

Adott $X = \{x_1, x_2, ..., x_n\}$ változóhalmaz esetén, minden x_i, x_j ($i=1,2,\ldots,n$, $j=1,2,\ldots,n$, $i \neq j$) változópárra kiszámítható a két normált fedési-mutató, majd ezek egy nxn-es általában nem szimmetrikus mátrixba rendezhetők. Jelöljük az így nyert mátrixot $V = \lfloor v_{ij} \rfloor$-vel, ahol

(4.1) $$v_{ij} = FN(x_i, x_j) \quad i = 1,2,...,n \quad j = 1,2,...,n$$

A (2.6), (2.7) definíciós összefüggésekből adódik, hogy a V mátrix azonos sorában, illetve azonos oszlopában lévő értékek aritmetikailag összeadhatók, hiszen azonos vonatkoztatási változóra (azonos vonatkoztatási struktúrára) számítjuk a normált fedési-mutatókat. Figyelembevéve a hatás kétirányúságát, a V mátrix i-ik sorát összegezve azt kapjuk, hogy *az x_i változóra az adott változókörnyezetben mekkora összhatást gyakorol az összes többi változó*. Legyen tehát

(4.2) $$V_i = \sum_{j=1}^{n} v_{ij} = \sum_{j=1}^{n} FN(x_i, x_j)$$

(4.3) $$V^i = \sum_{j=1}^{n} v_{ji} = \sum_{j=1}^{n} FN(x_j, x_i)$$

A (2.13) összefüggés szerint, adott változópár esetén a maximális hatáshoz tartozó normált fedési-mutató értéke *1*, azaz V_i , illetve V^i maximális értéke pontosan n lehet (az $FN(x_i,x_i)$ főátlóbeli elemeket is figyelembevéve). Definiáljuk mindenegyes változóhoz a következő két indexet:

(4.4) $$H(x_i) = \frac{V^i \cdot 100}{n} = \frac{\left(\sum_{j=1}^{n} v_{ij}\right) \cdot 100}{n}$$

(4.5) $$F(x_i) = \frac{V_i \cdot 100}{n} = \frac{\left(\sum_{j=1}^{n} v_{ji}\right) \cdot 100}{n}$$

A $H(x_i)$ index azt jelenti, hogy az X változókörnyezetben az x_i változó mennyire hat a többi változóra (*hány százalékban ható-típusú?*).
Az $F(x_i)$ index pedig azt jelenti, hogy az X változókörnyezetben az x_i változó mennyire függő-típusú, azaz a többi változómennyire hat rá (*hány százalékban függő-típusú?*).

A fentiek alapján két új fogalmat vezettünk be, a szokásos „függő” és „független” változó fogalmak helyett. Hiszen modellünkben minden változó egy adott változókörnyezetben „kettős életet él”, azaz bizonyos mértékig hatást gyakorol a többi változóra, ugyanakkor a többi változó is hat rá, tehát részben *ható*, részben *függő-típusú*. Ezek mértékét éppen a $H(x_i)$ és $F(x_i)$ indexek adják meg az adott változókörnyezetre vonatkozóan.

4.1. A fedési mátrix képi megjelenítése

A *V* mátrixokban szereplő *normált fedési-mutatókat* (lásd (4.1)) *szintekre oszthatjuk*, így a változók hatás-struktúráját az adott szinten leíró *gráf szomszédossági mátrixát* kapjuk, amelyhez egyértelműen rendelhető egy ***digitális kép***.
Legyen a vizsgált szint értéke $0 \le s \le 1$, ekkor *V*-hez rendeljük hozzá az alábbiak szerint a *V'* mátrixot:

$$V'(i,j) = v'_{ij} = 0 \quad ha\ v_{ij} \langle s$$
$$V'(i,j) = v'_{ij} = 1 \quad ha\ v_{ij} \ge s \tag{4.6}$$

Ekkor a *KV'* képmátrix így áll elő:

$$KV'(i,j) = k'_{ij} = fehér \quad ha\ v'_{ij} = 0$$
$$KV'(i,j) = k'_{ij} = fekete \quad ha\ v'_{ij} = 1 \tag{4.7}$$

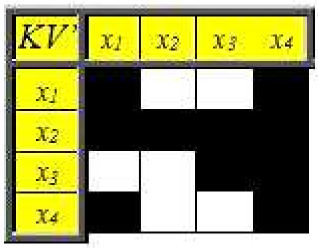
PÉLDA az x_1, x_2, x_3, x_4 változók esetén, ha *s=0.6 (lásd 1-3. ábra)*

V	x_1	x_2	x_3	x_4
x_1	1	0.3	0.5	0.7
x_2	0.6	1	0.8	0.7
x_3	0.4	0.5	1	0.9
x_4	0.8	0.3	0.2	1

4.1. ábra

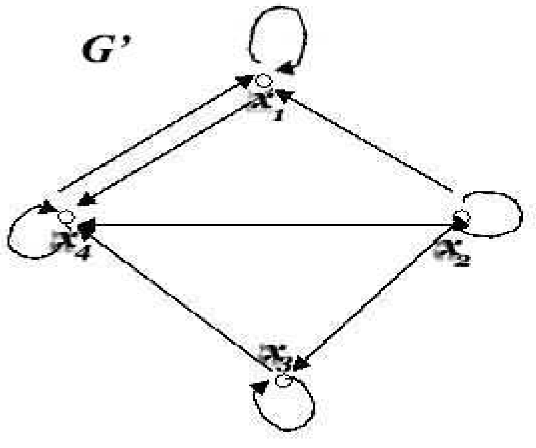
V'	x_1	x_2	x_3	x_4
x_1	1	0	0	1
x_2	1	1	1	1
x_3	0	0	1	1
x_4	1	0	0	1

4.2. ábra

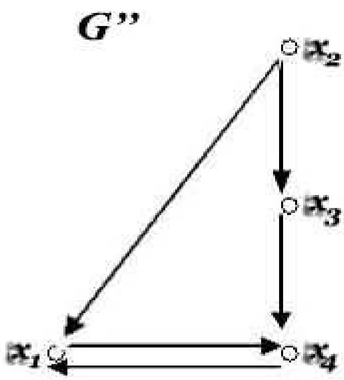


4.3. ábra

A *V'* szomszédossági mátrixhoz tartozó *G'* gráf az x_1, x_2, x_3, x_4 változók által meghatározott rendszer *s=0.6* szinthez tartozó struktúrája (lásd 4.4.ábra). Ha a *G'* gráfból elhagyjuk az úgynevezett tranzitív és hurok éleket, akkor megkapjuk a gráf vázát képező *G''* gráfot, amely jóval áttekinthetőbb, a *változók hatási hierarchiája* szempontjából (lásd 4.5.ábra).



4.4. ábra



4.5. ábra

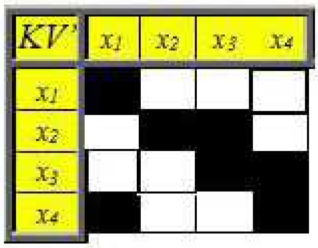
s=0.8 (lásd 6-8. ábra)

V	x_1	x_2	x_3	x_4
x_1	1	0.3	0.5	0.7
x_2	0.6	1	0.8	0.7
x_3	0.4	0.5	1	0.9
x_4	0.8	0.3	0.2	1

4.6. ábra

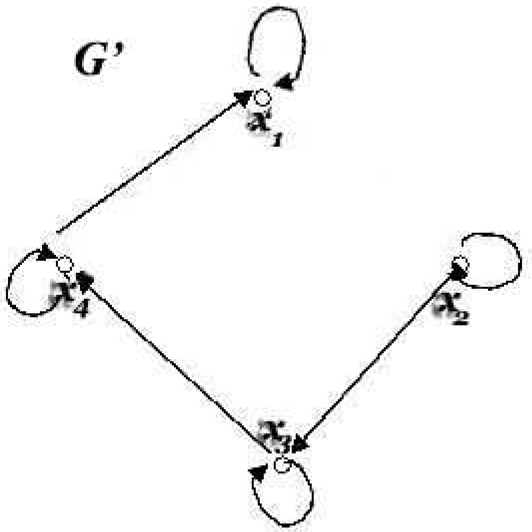
V'	x_1	x_2	x_3	x_4
x_1	1	0	0	0
x_2	0	1	1	0
x_3	0	0	1	1
x_4	1	0	0	1

4.7. ábra

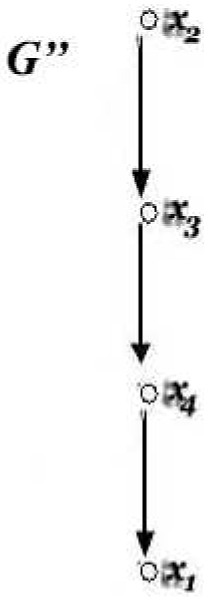


4.8. ábra

A *V'* szomszédossági mátrixhoz tartozó *G'* gráf az x_1, x_2, x_3, x_4 változók által meghatározott rendszer *s=0.8* szinthez tartozó struktúrája (lásd 4.9.ábra). Itt ismételten a *G'* gráfból elhagyjuk az úgynevezett tranzitív és hurok éleket, akkor megkapjuk a gráf vázát képező *G''* gráfot, amely jóval áttekinthetőbb, a *változók hatási hierarchiája* szempontjából (lásd 4.10.ábra).



4.9. ábra



4.10. ábra

Hivatkozás jegyzék

[1] Dénes, Tamás: *Graph theoretical approach to structural representation of systems*
An attempt to generalize the holography principle
Proceedings of the Fourth International Conf. for Pattern Recognition, Kyoto, Japan 1978.
http://www.titoktan.hu/_raktar/_e_vilagi_gondolatok/StrModel_Kyoto1978-ang.pdf

[2] Dénes Tamás: *Rendszerek strukturális modellezéséről*
VIII. Magyar Operációkutatási Konferencia Kiadványa, Szeged 1978.

[3] Dénes Tamás: *Rendszerek strukturális modellezéséről*
Csepel Művek Műszaki-Közgazdasági Szemle, 1980/1.
http://www.titoktan.hu/_raktar/_e_vilagi_gondolatok/RendszerekStrModellezese.pdf