Rendszerváltozók strukturaelemzésének módszertana

(A *fedési-mutató* alkalmazása)

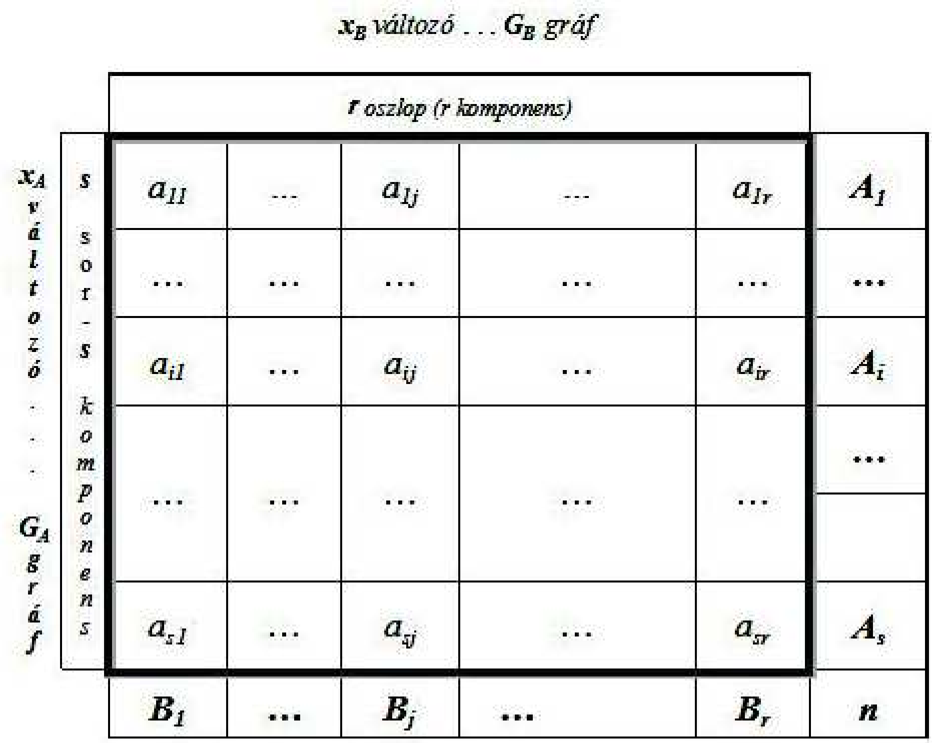
Dénes Tamás matematikus
Budapest, 1984.

Jelen dolgozatban *A Rendszerváltozók strukturaelemzésének elmélete és gráfelméleti modellje* (lásd [1]) című dolgozatomban bevezetett *fedési-mutató* empirikus alkalmazását mutatom be.

----- . -----

1. A gráf modell

Az [1] dolgozat 2.1. ábráján látható bármely x_i változóhoz rendelt G_i gráf struktúrája n_i *számú* teljes részgráf komponensből áll. Most vizsgáljuk meg tetszőleges x_A és x_B változókhoz rendelt $G_A=(P,E_A)$ és $G_B=(P,E_B)$ gráfok metszet struktúráját, amit az alábbi MX_{AB} mátrixban foglaltam össze (lásd 1.1. ábra).



1.1. ábra A G_A és G_B gráfok metszet-struktúráját összefoglaló MX_{AB} mátrix

1.1. ábra jelölései
s **:** $G_A=(P,E_A)$ gráf komponenseinek száma
r **:** $G_B=(P,E_B)$ gráf komponenseinek száma
$|P|=n$ **:** G_A és G_B gráfok szögpont száma (a rendszerváltozók száma)
$A_1,A_2,\ldots,A_s$ **:** rendre a G_A gráf komponenseinek szögpont száma
$B_1,B_2,\ldots,B_r$ **:** rendre a G_B gráf komponenseinek szögpont száma

***a_{ij}* :** a G_A gráf i-ik komponensének és a G_B gráf j-ik komponensének metszetébe eső szögpontok száma, vagyis

(1.1) $$a_{ij} = \left| P_{G_{A_i} \cap G_{B_j}} \right|$$

***x_i* :** a G_A gráf i-ik komponensének és a G_B gráf r-ik komponensének metszetébe eső szögpontok száma, vagyis

(1.2) $$x_i = \left| P_{G_{A_i} \cap G_{B_r}} \right|$$

***y_j* :** a G_B gráf j-ik komponensének és a G_A gráf s-ik komponensének metszetébe eső szögpontok száma, vagyis

(1.3) $$y_j = \left| P_{G_{A_s} \cap G_{B_j}} \right|$$

***x* :** a G_A gráf s-ik komponensének és a G_B gráf r-ik komponensének metszetébe eső szögpontok száma, vagyis

(1.4) $$x = \left| P_{G_{A_s} \cap G_{B_r}} \right|$$

2. A *fedési-mutató* minimumának meghatározása

Ahhoz, hogy az [1] dolgozat (2.6), (2.7) definíciói szerint meghatározott $F(x_B, x_A)$, illetve $F(x_A, x_B)$ fedési-mutatókat kiszámítsuk, a G_A és G_B gráfok metszetében lévő élek számát kell meghatározni. Mivel minden metszetbeli teljes részgráf az MX_{AB} mátrix szögpontszámain értelmezett, így felírhatjuk, hogy

(2.1) $$a_{ij} \Rightarrow \quad \left| G_{A_i} \cap G_{B_j} \right| = \left| E_{A_i} \cap E_{B_j} \right| = \\ = \left| E_{a_{ij}} \right| = \frac{a_{ij}(a_{ij} - 1)}{2} = \frac{a_{ij}^2 - a_{ij}}{2}$$

(2.2) $$A_i \Rightarrow \quad \left| E_{A_i} \right| = \frac{A_i(A_i - 1)}{2} = \frac{A_i^2 - A_i}{2}$$

$$(2.1) \Rightarrow \quad \left|G_A \cap G_B\right| = \left|E_A \cap E_B\right| = \sum_{i=1}^{s}\sum_{j=1}^{r} E_{a_{ij}} =$$

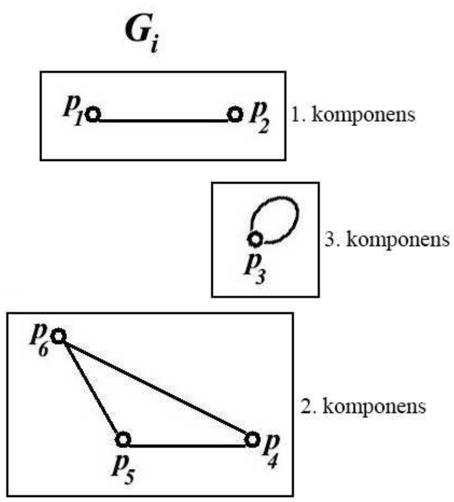
(2.3) $$= \sum_{i=1}^{s}\sum_{j=1}^{r}\frac{a_{ij}^2 - a_{ij}}{2} = \sum_{i=1}^{s}\sum_{j=1}^{r}\frac{a_{ij}^2}{2} - \underbrace{\sum_{i=1}^{s}\sum_{j=1}^{r}\frac{a_{ij}}{2}}_{\frac{n}{2}} = \frac{\left(\sum_{i=1}^{s}\sum_{j=1}^{r} a_{ij}^2\right) - n}{2}$$

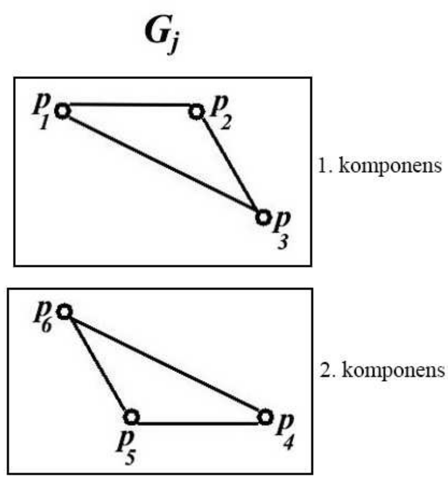
(2.4) $$(2.2) \Rightarrow \quad \left|E_A\right| = \sum_{i=1}^{s}\left|E_{A_i}\right| = \frac{\sum_{i=1}^{s} A_i^2 - \underbrace{\sum_{i=1}^{s} A_i}_{n}}{2} = \frac{\left(\sum_{i=1}^{s} A_i^2\right) - n}{2}$$

(2.5) $$F\left(x_B, x_A\right) = \frac{\left|E_A \cap E_B\right|}{\left|E_A\right|} \overset{(2.3),(2.4)}{=} \frac{\left(\sum_{i=1}^{s}\sum_{j=1}^{r} a_{ij}^2\right) - n}{\left(\sum_{i=1}^{s} A_i^2\right) - n}$$

(2.6) $$F\left(x_A, x_B\right) = \frac{\left|E_A \cap E_B\right|}{\left|E_B\right|} \overset{(2.3),(2.4)}{=} \frac{\left(\sum_{i=1}^{s}\sum_{j=1}^{r} a_{ij}^2\right) - n}{\left(\sum_{j=1}^{r} B_j^2\right) - n}$$

PÉLDA
Legyen a két gráf G_i és G_j (lásd 2.1. és 2.2. ábra), ahol $n=6$, $s=3$, $r=2$





2.1. ábra **2.2. ábra**

A két gráf metszetét meghatározó (1.1. ábra szerinti) MX_{ij} mátrix a 2.3. ábrán látható.

G_i gráf komponensei	G_j gráf komponensei 1.	2.	
1.	2	0	2
2.	0	3	3
3.	1	0	1
	3	3	6

2.3. ábra

Ekkor (2.5) és (2.6)-szerint az $F(x_i,x_j)$ és $F(x_j,x_i)$ fedési-mutatókra a következőket kapjuk:

(2.7) $$F\left(x_j, x_i\right) \overset{(2.5)}{=} \frac{\left(\sum_{i=1}^{3}\sum_{j=1}^{2} a_{ij}^2\right) - 6}{\left(\sum_{i=1}^{3} A_i^2\right) - 6} = \frac{(2^2+3^2+1^2)-6}{(2^2+3^2+1^2)-6} = 1$$

(2.8) $$F\left(x_i, x_j\right) \overset{(2.6)}{=} \frac{\left(\sum_{i=1}^{3}\sum_{j=1}^{2} a_{ij}^2\right) - 6}{\left(\sum_{i=1}^{2} B_i^2\right) - 6} = \frac{(2^2+3^2+1^2)-6}{(3^2+3^2)-6} = \frac{2}{3} = 0.666$$

Az eredmények pontosan egybeesnek az [1] dolgozat (2.9) levezetésével.

3. A *fedési-mutató* szélsőértékei

A *normált fedési-mutatók* kiszámításához szükségünk van a megfelelő fedési-mutatók minimum értékeire, azaz $F_{min}(x_i,x_j)$ és $F_{min}(x_j,x_i)$ meghatározására.

3.1. SEGÉDTÉTEL

Legyenek $a>0$, $b>0$, $x>0$ valós számok, valamint

(3.1) $$a = b + x$$

Ekkor teljesül a következő egyenlőtlenség:

(3.2) $$a^2 + b^2 \geq 2b^2$$

Bizonyítás

(3.3) $$\overset{(3.1)}{\Rightarrow} a^2 + b^2 = \underbrace{(b+x)^2}_{\geq b^2} + b^2 \geq 2b^2$$

Q.E.D.

A 3.1.Segédtétel következményeként kapjuk, hogy (3.1) teljesülése esetén, az a^2+b^2 összeg akkor minimális, ha $a=b$, vagyis

(3.4) $$\overset{(3.1),\,(3.3)}{\Rightarrow} \lim_{x\to 0}(a^2+b^2)=\min(a^2+b^2)=2b^2 \quad \Rightarrow \quad a=b$$

Ebből következik az alábbi 3.1. Tétel.

3.1. TÉTEL

Legyen az $a_1, a_2, \ldots, a_i, \ldots, a_m$ valós számokból álló sorozat minden tagja nem negatív, azaz

(3.5) $$\forall 1\le i\le m \Rightarrow \quad a_i \ge 0 \quad és \quad a_i \in R$$

valamint jelölje a sorozat összegét S.

(3.6) $$S=\left(\sum_{i=1}^{m} a_i\right)$$

Ekkor a sorozat négyzetösszegének elméleti minimumára fennáll a következő:

(3.7) $$\overset{(3.4),\,(3.5,\,(3.6)}{\Rightarrow} \min\left(\sum_{i=1}^{m} a_i^2\right)=m\left(\frac{S}{m}\right)^2=\frac{S^2}{m}$$

Vagyis az a_i sorozat négyzetösszege akkor minimális, ha az összes eleme egyenlő $\frac{S}{m}$-el.

----- . -----

Vizsgáljuk meg, hogy alakul a 3.1. Tétel, ha az a_i sorozat elemei csak egész számok lehetnek?

Jelölje $\frac{S}{m}$ egészrészét $\left[\frac{S}{m}\right]$, ekkor igaz a 3.2. Tétel.

3.2. TÉTEL

Legyen $a_1, a_2, \ldots, a_i, \ldots, a_m$ nem negatív egész számokból álló sorozat, valamint jelölje a sorozat összegét S.

(3.8) $$\forall 1\le i\le m \Rightarrow \quad a_i \ge 0 \quad és \quad a_i \in Z$$

(3.9) $$k=S-m\left[\frac{S}{m}\right]$$

Ekkor a sorozat négyzetösszegének elméleti minimumára fennáll a következő:

(3.10)
$$\overset{(3.8),\,(3.9)}{\Rightarrow} \min\left(\sum_{i=1}^{m} a_i^2\right)=(m-k)\left[\frac{S}{m}\right]^2+k\left(\left[\frac{S}{m}\right]+1\right)^2=$$
$$=m\left[\frac{S}{m}\right]^2-k\left[\frac{S}{m}\right]^2+k\left[\frac{S}{m}\right]^2+2k\left[\frac{S}{m}\right]+k=m\left[\frac{S}{m}\right]^2+2k\left[\frac{S}{m}\right]+k\overset{(3.9)}{=}$$
$$\overset{(3.9)}{=}m\left[\frac{S}{m}\right]^2+2\left[\frac{S}{m}\right]\left(S-m\left[\frac{S}{m}\right]\right)+S-m\left[\frac{S}{m}\right]=$$
$$=m\left[\frac{S}{m}\right]^2+2S\left[\frac{S}{m}\right]-2m\left[\frac{S}{m}\right]^2+S-m\left[\frac{S}{m}\right]=(2S-m)\left[\frac{S}{m}\right]-m\left[\frac{S}{m}\right]^2+S$$

Alkalmazzuk az egészrész és törtrész viszonyára vonatkozó $[a]=a-\{a\}$ összefüggést:

(3.11)
$$(2S-m)\left[\frac{S}{m}\right]-m\left[\frac{S}{m}\right]^2+S=(2S-m)\left(\frac{S}{m}-\left\{\frac{S}{m}\right\}\right)-m\left(\frac{S}{m}-\left\{\frac{S}{m}\right\}\right)^2+S=$$
$$=\frac{2S^2}{m}-S-2S\left\{\frac{S}{m}\right\}+m\left\{\frac{S}{m}\right\}-m\left(\frac{S^2}{m^2}-2\frac{S}{m}\left\{\frac{S}{m}\right\}+\left\{\frac{S}{m}\right\}^2\right)+S=$$
$$=\frac{2S^2}{m}-S-2S\left\{\frac{S}{m}\right\}+m\left\{\frac{S}{m}\right\}-\frac{S^2}{m}+2S\left\{\frac{S}{m}\right\}-m\left\{\frac{S}{m}\right\}^2+S\Rightarrow$$
$$\Rightarrow \min\left(\sum_{i=1}^{m}a_i^2\right)=\frac{S^2}{m}+m\underbrace{\left(\left\{\frac{S}{m}\right\}-\left\{\frac{S}{m}\right\}^2\right)}_{0\langle\ldots\langle 1}$$

PÉLDA
Legyen az egész számokból álló *m=5* elemű sorozat *10*, *12*, *15*, *16*, *20*. Ekkor

(3.12) $$S=13+14+15+17+20=79 \quad\Rightarrow\quad \left[\frac{79}{5}\right]=15 \quad\Rightarrow\quad k=79-5\cdot 15=4$$

(3.13)
$$\sum_{i=1}^{5}a_i^2=13^2+14^2+15^2+17^2+20^2=1279$$
$$\min\left(\sum_{i=1}^{5}a_i^2\right)\overset{(3.10)}{=}(5-4)15^2+4(15+1)^2=15^2+4\cdot 16^2=225+1024=1249$$
$$\min\left(\sum_{i=1}^{5}a_i^2\right)\overset{(3.11)}{=}\frac{79^2}{5}+5(0.8-0.8^2)=1248.2+0.8=1249$$

----- . -----

3.2. SEGÉDTÉTEL
Legyen a_1, a_2, …, a_i, …, a_m valós számokból álló sorozat és jelölje a sorozat összegét *S*. A sorozat négyzetösszege akkor maximális, ha *m-1* eleme nulla, vagyis

(3.14) $$\forall 1\le i\le m-1 \Rightarrow a_i=0 \text{ és } a_m=S \quad\Rightarrow\quad \max\left(\sum_{i=1}^{m}a_i^2\right)=S^2$$

Bizonyítás
Tegyük fel, hogy az a_m elemen kívül van még legalább egy nem pozitív eleme a sorozatnak.

(3.15)
$$\forall 1\le i\le m-2 \Rightarrow a_i=0 \text{ és } a_{m-1}\rangle 0,\ a_m=S-a_{m-1} \quad\Rightarrow$$
$$\Rightarrow \sum_{i=1}^{m}a_i^2=a_{m-1}^2+(S-a_{m-1})^2=a_{m-1}^2+S^2-2Sa_{m-1}+a_{m-1}^2=$$
$$=2a_{m-1}\underbrace{(a_{m-1}-S)}_{-a_m}+S^2=S^2-2a_{m-1}$$

Mivel a feltételek szerint a_{m-1} és a_m pozitív valós számok, így a (3.15)-ban kapott érték kisebb, mint a (3.14)-beli maximum. Teljes indukcióval belátható, hogy ez még nagyobb mértékben teljesül, ha a sorozat többi eleme sem nulla.

Q.E.D.

Már minden rendelkezésre áll, hogy kiszámítsuk (3.7) és (3.14) alapján az MX_{AB} mátrixbeli elemek négyzetösszegének elméleti minimumát.

(3.16) $$S = \sum_{i=1}^{s}\sum_{j=1}^{r} a_{ij} = \sum_{i=1}^{s} A_i = \sum_{j=1}^{r} B_j = n \quad \acute{e}s \quad m = s \cdot r$$

A fedési-mutató értéke akkor minimális, ha a tört számlálója minimális, a nevezője pedig maximális, vagyis

(3.17) $$F_{\min}(x_B, x_A) = \frac{\min\left(\sum_{i=1}^{s}\sum_{j=1}^{r} a_{ij}^2\right) - n}{\max\left(\sum_{i=1}^{s} A_i^2\right) - n} \overset{(3.7),\,(3.14)}{=} \frac{\frac{n^2}{rs} - n}{n^2 - n} = \frac{n-1}{(n-1)rs} = \frac{1}{rs}$$

Mivel az így kapott érték *r* és *s*-re szimmetrikus, így adódik, hogy

(3.18) $$F_{\min}(x_A, x_B) = \frac{\min\left(\sum_{i=1}^{s}\sum_{j=1}^{r} a_{ij}^2\right) - n}{\max\left(\sum_{j=1}^{r} B_j^2\right) - n} \overset{(3.7),\,(3.14)}{=} \frac{\frac{n^2}{rs} - n}{n^2 - n} = \frac{n-1}{(n-1)rs} = \frac{1}{rs}$$

(3.7) és (3.14) alapján meghatározható a fedési-mutató elméleti maximum értéke is, ami akkor maximális, ha a tört számlálója maximális, amiből (3.16) alapján a nevező adódik:

(3.19) $$F_{\max}(x_B, x_A) = \frac{\max\left(\sum_{i=1}^{s}\sum_{j=1}^{r} a_{ij}^2\right) - n}{\left(\sum_{i=1}^{s} A_i^2\right) - n} \overset{(3.14)}{=} \frac{n^2 - n}{\left(\sum_{i=1}^{s} A_i^2\right) - n}$$

(3.20) $$\left(\sum_{i=1}^{s} A_i^2\right) \overset{(3.14)}{=} (s-1)0 + n^2 = n^2 \quad \overset{(3.19)}{\Rightarrow} \quad F_{\max}(x_B, x_A) = \frac{n^2 - n}{n^2 - n} = 1$$

PÉLDA a 2.3. ábra alapján:

(3.21) $$r = 2,\ s = 3,\ n = 6 \quad \overset{(3.17),\,(3.18)}{\Rightarrow} \quad F_{\min}(x_i, x_j) = F_{\min}(x_j, x_i) = \frac{1}{6}$$

Vessük össze a 2.3. ábra gráfjaira kapott (2.7) és (2.8) aktuális értékekkel!

----- . -----

4. A *normált fedési-mutató* kiszámítása

A fedési-mutató elméleti minimumának (3.17), (3.18) meghatározásával mód nyílik az [1]-ben definiált (lásd [1] (2.14)) $FN(x_B, x_A)$, $FN(x_A, x_B)$ normált fedési-mutatók kiszámítására. Amelyeknek [1] (2.13)-ban levezetett szélsőértékei a valódi (0,1) intervallumba transzformálják a normált fedési-mutató értékeket.

$$\xrightarrow{[1](2.14)} FN(x_B, x_A) = \frac{F(x_B, x_A) - F_{\min}(x_B, x_A)}{1 - F_{\min}(x_B, x_A)} \overset{(2.5),\,(3.17)}{=}$$

$$\overset{(2.5),\,(3.17)}{=} \frac{\dfrac{\left(\sum_{i=1}^{s}\sum_{j=1}^{r} a_{ij}^2\right) - n}{\left(\sum_{i=1}^{s} A_i^2\right) - n} - \dfrac{1}{rs}}{1 - \dfrac{1}{rs}} = \frac{rs\left(\dfrac{\left(\sum_{i=1}^{s}\sum_{j=1}^{r} a_{ij}^2\right) - n}{\left(\sum_{i=1}^{s} A_i^2\right) - n} - \dfrac{1}{rs}\right)}{rs - 1} =$$

$$= \frac{rs\left(\dfrac{\left(\left(\sum_{i=1}^{s}\sum_{j=1}^{r} a_{ij}^2\right) - n\right)rs - \left(\sum_{i=1}^{s} A_i^2\right) + n}{\left(\left(\sum_{i=1}^{s} A_i^2\right) - n\right)rs}\right)}{rs - 1} = \frac{\dfrac{\left(\left(\sum_{i=1}^{s}\sum_{j=1}^{r} a_{ij}^2\right) - n\right)rs - \left(\sum_{i=1}^{s} A_i^2\right) + n}{\left(\left(\sum_{i=1}^{s} A_i^2\right) - n\right)}}{rs - 1} =$$

$$\frac{\left(\left(\sum_{i=1}^{s}\sum_{j=1}^{r} a_{ij}^2\right) - n\right)rs - \left(\sum_{i=1}^{s} A_i^2\right) + n}{\left(\left(\sum_{i=1}^{s} A_i^2\right) - n\right)(rs-1)} = \frac{\left(\sum_{i=1}^{s}\sum_{j=1}^{r} a_{ij}^2\right)rs - nrs - \left(\sum_{i=1}^{s} A_i^2\right) + n}{\left(\left(\sum_{i=1}^{s} A_i^2\right) - n\right)(rs-1)} \Rightarrow$$

(4.1)

$$\Rightarrow \quad FN(x_B, x_A) = \frac{\left(\sum_{i=1}^{s}\sum_{j=1}^{r} a_{ij}^2\right)rs - \left(\sum_{i=1}^{s} A_i^2\right) - n(rs-1)}{(rs-1)\left(\sum_{i=1}^{s} A_i^2\right) - n(rs-1)}$$

(4.2)

$$FN(x_A, x_B) = \frac{\left(\sum_{i=1}^{s}\sum_{j=1}^{r} a_{ij}^2\right)rs - \left(\sum_{j=1}^{r} B_j^2\right) - n(rs-1)}{(rs-1)\left(\sum_{j=1}^{r} B_j^2\right) - n(rs-1)}$$

PÉLDA a 2.3. ábra alapján:

$$r = 2,\ s = 3,\ n = 6 \overset{(4.1)}{\Rightarrow}$$

(4.3) $$\overset{(4.1)}{\Rightarrow} \quad FN\left(x_B, x_A\right) = \frac{6 \cdot 2^2 + 6 \cdot 3^2 + 6 \cdot 1^2 - 2^2 - 3^2 - 1^2 - 6 \cdot 5}{(2^2 + 3^2 + 1^2)5 - 6 \cdot 5} =$$

$$= \frac{24 + 54 + 6 - 4 - 9 - 1 - 30}{20 + 45 + 5 - 30} = \frac{40}{40} = 1$$

$$r = 2,\ s = 3,\ n = 6 \overset{(4.2)}{\Rightarrow}$$

(4.4) $$\overset{(4.2)}{\Rightarrow} \quad FN\left(x_A, x_B\right) = \frac{6 \cdot (2^2 + 1^2 + 3^2) - 3^2 - 3^2 - 6 \cdot 5}{(3^2 + 3^2)5 - 6 \cdot 5} =$$

$$= \frac{24 + 6 + 54 - 9 - 9 - 30}{45 + 45 - 30} = \frac{36}{60} = \frac{3}{5} = 0.6$$

Vessük össze a 2.3. ábra gráfjaira kapott (2.7) és (2.8) aktuális értékekkel!

Az *FN* normált fedési-mutató abszolút maximumát kapjuk, ha $x_A = x_B$, ekkor ugyanis

$$r = s,\ \forall i \neq j \Rightarrow a_{ij} = 0,\ \forall i = j \Rightarrow a_{ij} = A_i = B_j \quad \overset{(4.2)}{\Rightarrow}$$

(4.5) $$\overset{(4.2)}{\Rightarrow} \quad FN(x_A, x_A) = \frac{\left(\sum_{i=1}^{s}\sum_{j=1}^{r} a_{ij}^2\right) rs - \left(\sum_{j=1}^{r} B_j^2\right) - n(rs-1)}{(rs-1)\left(\sum_{j=1}^{r} B_j^2\right) - n(rs-1)} =$$

$$= \frac{\left(\sum_{j=1}^{r} B_j^2\right) rs - \left(\sum_{j=1}^{r} B_j^2\right) - n(rs-1)}{(rs-1)\left(\sum_{j=1}^{r} B_j^2\right) - n(rs-1)} = \frac{\left(\sum_{j=1}^{r} B_j^2\right)(rs-1) - n(rs-1)}{(rs-1)\left(\sum_{j=1}^{r} B_j^2\right) - n(rs-1)} = 1$$

----- . -----

A *normált fedési-mutatókra* épülő *n-változós struktúraelemzési GRAF1 nevű programcsomagot* FORTRAN programozási nyelven készítettem el. Ennek leírását tartalmazza a [2] dolgozat.

Hivatkozás jegyzék

[1] Dénes Tamás: *A Rendszerváltozók strukturaelemzésének elmélete és gráfelméleti modellje, Budapest, 1984.*
http://www.titoktan.hu/_raktar/_e_vilagi_gondolatok/Rendszervaltozok-str-elemzesenek-elmelete.pdf

[2] Dénes Tamás: *Rendszerváltozók strukturaelemzéséhez készült GRAF1 programcsomag, Budapest, 1984.*
http://www.titoktan.hu/_raktar/_e_vilagi_gondolatok/Rendszervaltozok-str-elemzese-GRAF1programcsomag.pdf